Problemas de Álgebra Lineal

By:
Daniel Felipe Gonzalez Obando

Problemas de Álgebra Lineal

By:
Daniel Felipe Gonzalez Obando

Online:
< http://cnx.org/content/col10581/1.2/ >

C O N N E X I O N S

Rice University, Houston, Texas

This selection and arrangement of content as a collection is copyrighted by Daniel Felipe Gonzalez Obando. It is licensed under the Creative Commons Attribution 2.0 license (http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/).
Collection structure revised: September 25, 2008
PDF generated: October 26, 2012
For copyright and attribution information for the modules contained in this collection, see p. 4.

Table of Contents

1 Espacios Vectoriales Reales

1.1 Espacios Vectoriales 1

Index 3

Attributions 4

Chapter 1

Espacios Vectoriales Reales

1.1 Espacios Vectoriales[1]

Ejercicios 6.1 Espacios Vectoriales realesDaniel Felipe González Obando

Texto ÁLGEBRA LINEAL. Bernard Kolman, David R. Hill

3. Determine si el conjunto dado V es cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

V es el conjunto de todos los polinomios de la forma $at^2 + bt + c$ donde a, b y c son números reales, y $b = a + 1$;

$$\left(a_1t^2 + b_1t + c_1\right) \oplus \left(a_2t^2 + b_2t + c_2\right) = \left(a_1 + a_2\right)t^2 + \left(b_1 + b_2\right)t + \left(c_1 + c_2\right) \tag{1.1}$$

y

$$r \odot \left(at^2 + bt + c\right) = (ra)\,t^2 + (rb)\,t + rc. \tag{1.2}$$

13. determine si el conjunto dado, junto con las operaciones dadas es un espacio vectorial. Si no lo es, enumere las propiedades de la definición 1 que no se cumplen.

El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales de la forma $(0, 0, z)$ con las operaciones

$$(0, 0, z) \oplus \left(0, 0, z^{'}\right) = \left(0, 0, z + z^{'}\right) \tag{1.3}$$

y

$$c \odot (0, 0, z) = (0, 0, cz) \tag{1.4}$$

Solución.

3.

Proof El problema nos dice $at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; y $b = a + 1$

entonces si

$$\overrightarrow{u} = a_1t^2 + b_1t + c_1 \tag{1.5}$$

$$\overrightarrow{v} = a_2t^2 + b_2t + c_2 \tag{1.6}$$

tendremos

$$\overrightarrow{u} \oplus \overrightarrow{v} = \left(a_1 + a_2\right)t^2 + \left(b_1 + b_2\right)t + \left(c_1 + c_2\right) \tag{1.7}$$

[1] This content is available online at <http://cnx.org/content/m17552/1.2/>.

cambiando b por $a+1$,

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2)\, t^2 + (a_1 + 1 + a_2 + 1)\, t + (c_1 + c_2) \tag{1.8}$$

reduciendo la expresión $(a_1 + 1 + a_2 + 1)$,

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2)\, t^2 + (a_1 + a_2 + 2)\, t + (c_1 + c_2) \tag{1.9}$$

tomando $a_1 + a_2$ como a,

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a_1 + a_2)\, t^2 + (a + 2)\, t + (c_1 + c_2) \tag{1.10}$$

y por tanto $b \neq a+2$, con lo cual concluimos que V no esta cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$. □

13.

Proof El problema nos dice que $(0,0,z) \in \mathbb{R}$ y que se cumple $(0,0,z) \oplus \left(0,0,z^{'}\right) = \left(0,0,z+z^{'}\right)$ y $c \odot (0,0,z) = (0,0,cz)$, por lo tanto viendo la aplicación de las propiedades comprobaremos si es o no un espacio vectorial.

Si $\vec{u} = (0,0,z)\,, \vec{v} = \left(0,0,z^{'}\right), \vec{w} = \left(0,0,z^{''}\right) \in V$

- $\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$, esto es $\vec{u} \oplus \vec{v} = \left(0,0,z+z^{'}\right) \in V$, por lo tanto se cumple la propiedad clausurativa de la suma vectorial.
- $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$, esto es $\left(0,0,z+z^{'}\right) = \left(0,0,z^{'}+z\right)$, por lo tanto se cumple la propiedad conmutativa de la suma vectorial.
- $\left(\vec{w} \oplus \vec{v}\right) \oplus \vec{u} = \vec{w} \oplus \left(\vec{v} \oplus \vec{u}\right)$, esto es $\left(0,0,z^{''}+z^{'}\right) \oplus (0,0,z) = \left(0,0,z^{''}\right) \oplus \left(0,0,z^{'}+z\right)$, que es lo mismo que $\left(0,0,z^{''}+z^{'}+z\right) = \left(0,0,z^{''}+z^{'}+z\right)$, por lo tanto se cumple la propiedad asociativa de la suma vectorial.
- $\exists!\ \vec{0} \in V : \vec{0} \oplus \vec{u} = \vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{u}$, esto es $(0,0,0) \oplus (0,0,z) = (0,0,z) \oplus (0,0,0) = (0,0,z)$, por lo tanto se cumple la propiedad modulativa de la suma vectorial.
- $\exists!\ -\vec{u} \in V : -\vec{u} \oplus \vec{u} = \vec{u} \oplus -\vec{u} = \vec{0}$ esto es $(0,0,-z) \oplus (0,0,z) = (0,0,z) \oplus (0,0,-z) = (0,0,0)$, por lo tanto se cumple la propiedad de la existencia del inverso de la suma vectorial.

Además,

- $a \odot \vec{u} \in V$, esto es $a \odot (0,0,z) = (0,0,az) \in V$, por lo tanto se cumple la propiedad clausurativa del producto escalar.
- $(a \cdot b) \odot \vec{u} = a \odot \left(b \odot \vec{u}\right)$, esto es $(a \cdot b) \odot (0,0,z) = a \odot (b \odot (0,0,z)) = (0,0,abz)$, por lo cual se cumple la propiedad asociativa del producto escalar.
- $(a+b) \odot \vec{u} = \left(a \odot \vec{u}\right) \oplus \left(b \odot \vec{u}\right)$, esto es $(a+b) \odot (0,0,z) = (a \odot (0,0,z)) \oplus (b \odot (0,0,z)) = (0,0,(a+b) \cdot z)$, por lo tanto se cumple la primera propiedad de distribución del producto escalar.
- $a \odot \left(\vec{u} \oplus \vec{v}\right) = \left(a \odot \vec{u}\right) \oplus \left(a \odot \vec{v}\right)$, esto es $a \odot \left((0,0,z) \oplus \left(0,0,z^{'}\right)\right) = (a \odot (0,0,z)) \oplus \left(a \odot \left(0,0,z^{'}\right)\right) = \left(0,0,a\left(z+z^{'}\right)\right)$, por lo tanto se cumple la segunda propiedad distributiva del producto escalar.

Una vez desmostradas las propiedades de los espacios vectoriales, podemos decir que V es un espacio vectorial. □

Index of Keywords and Terms

Keywords are listed by the section with that keyword (page numbers are in parentheses). Keywords do not necessarily appear in the text of the page. They are merely associated with that section. *Ex.* apples, § 1.1 (1) **Terms** are referenced by the page they appear on. *Ex.* apples, 1

A Algebra, § 1.1(1)

E Espacios Vectoriales, § 1.1(1)
Espacios Vectoriales Reales, § 1.1(1)

Attributions

Collection: *Problemas de Álgebra Lineal*
Edited by: Daniel Felipe Gonzalez Obando
URL: http://cnx.org/content/col10581/1.2/
License: http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Module: "Espacios Vectoriales"
By: Daniel Felipe Gonzalez Obando
URL: http://cnx.org/content/m17552/1.2/
Pages: 1-2
Copyright: Daniel Felipe Gonzalez Obando
License: http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Problemas de Álgebra Lineal
Problemas variados de Álgebra lineal tomados de distintos libros.

About Connexions
Since 1999, Connexions has been pioneering a global system where anyone can create course materials and make them fully accessible and easily reusable free of charge. We are a Web-based authoring, teaching and learning environment open to anyone interested in education, including students, teachers, professors and lifelong learners. We connect ideas and facilitate educational communities.

Connexions's modular, interactive courses are in use worldwide by universities, community colleges, K-12 schools, distance learners, and lifelong learners. Connexions materials are in many languages, including English, Spanish, Chinese, Japanese, Italian, Vietnamese, French, Portuguese, and Thai. Connexions is part of an exciting new information distribution system that allows for **Print on Demand Books**. Connexions has partnered with innovative on-demand publisher QOOP to accelerate the delivery of printed course materials and textbooks into classrooms worldwide at lower prices than traditional academic publishers.