

CONVOLUCIÓN DE TIEMPO-CONTINUO*

Melissa Selik
Richard Baraniuk

Translated By:
Fara Meza

Based on *Continuous-Time Convolution*[†] by
Melissa Selik
Richard Baraniuk

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License [‡]

Abstract

Definir la convolución y obtener la Integral de Convolución.

1 Motivación

La convolución nos ayuda a determinar el efecto que tiene el sistema en la señal de entrada. Puede ser visto que el sistema lineal de tiempo invariante ¹ es completamente caracterizado por su respuesta al impulso. A primera vista, esto puede parecer de pequeño uso, ya que las funciones de impulso no están bien definidas en aplicaciones reales. Sin embargo la propiedad de desplazamiento del impulso nos dice que una señal puede ser descompuesta en una suma infinita (integral) de impulsos escalados y desplazados. Conociendo como un sistema afecta un impulso simple, y entendiendo la manera en que una señal es abarcada por impulsos escalados y sumados, suena razonable que sea posible escalar y sumar la respuesta al impulso a un sistema en para poder determinar que señal de salida resultara de una entrada en particular. Esto es precisamente lo que la convolución hace - **la convolución determina la salida del sistema por medio conocimiento de la entrada y la respuesta al impulso del sistema.**

En el resto de este modulo, vamos a examinar exactamente como la convolución es definida a partir del razonamiento anterior. Esto resultara en la integral de convolución (véase la siguiente sección) y sus propiedades². Estos conceptos son muy importantes en la Ingeniería Eléctrica y harán la vida de los ingenieros mas sencilla si se invierte el tiempo en entender que es lo que esta pasando.

*Version 1.4: Jun 1, 2009 8:31 am -0500

[†]<http://cnx.org/content/m10085/2.25/>

[‡]<http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/>

¹"Clasificación y Propiedades de los Sistemas" <<http://cnx.org/content/m12822/latest/>>

²"Propiedades de la Convolución" <<http://cnx.org/content/m12829/latest/>>

Para poder entender completamente la convolución, será de utilidad también ver la convolución de tiempo discreto ³⁾. También será de gran ayuda experimentar con los applets⁴ disponibles en internet. Este recurso nos ofrecerá una aproximación mas crucial del concepto.

2 Integral de Convolución

Como mencionamos anteriormente, la integral de convolución nos da una manera matemática fácil de expresar la salida de un sistema LTI basado en una señal arbitraria, $x(t)$, y la respuesta al impulso, $h(t)$. La **integral de convolución** es expresada como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

La convolución es una herramienta muy importante que es representada por el símbolo $*$, y puede ser escrita como

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (2)$$

Haciendo unos cambios simples en las variables de la integral de convolución, $\tau = t - \tau$, podemos ver que la convolución es **conmutativa**:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (3)$$

Para más información de las características de la integral de convolución, léase sobre la Propiedades de la Convolución ⁵.

Ahora presentaremos dos aproximaciones distintas que se derivan de la integral de convolución. Estos procesos, junto con un ejemplo básico, nos ayudaran para construir una intuición sobre la convolución.

3 Proceso I: El método corto

Este proceso sigue de cerca el mencionado en la sección anterior en la Motivación (Section 1: Motivación). Para iniciar esto, es necesario establecer las asunciones que haremos. En este momento, la única obligada en nuestro sistema es que este sea lineal e invariante en el tiempo.

Breve descripción de los pasos de este Proceso:

1. Un impulso de entrada, nos da como salida una respuesta al impulso.
2. Un impulso desplazado nos da como salida una respuesta al impulso desplazada. Esto es debido a la invariante en el tiempo del sistema
3. Podemos escalar el impulso de entrada para obtener como salida un impulso escalado. Esto es usando la propiedad de linealidad de la multiplicación escalar.
4. Podemos sumar un número infinito de estos impulsos escalados para obtener un número infinito de sumas de respuestas al impulso escaladas. Esto es usando la cualidad de la aditividad de linealidad.
5. Ahora vemos que esta suma infinita no es mas que una integral, así que podemos convertir ambos lados en integrales.
6. Reconociendo que la entrada es la función $f(t)$, también reconocemos que la salida es exactamente la integral de convolución .

³"Discrete Time Convolution" <<http://cnx.org/content/m10087/latest/>>

⁴<http://www.jhu.edu/~signals>

⁵"Propiedades de la Convolución" <<http://cnx.org/content/m12829/latest/>>

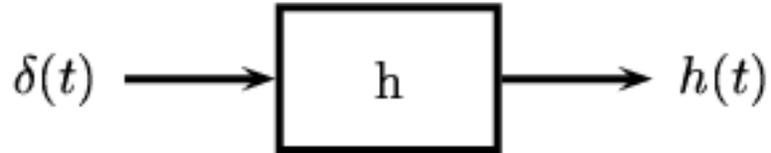


Figure 1: Empezamos con un sistema definido por su respuesta al impulso, $h(t)$.

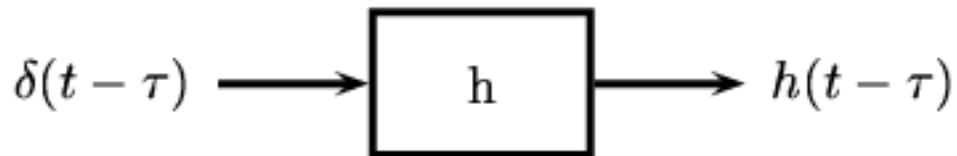


Figure 2: Después consideramos una versión desplazada del impulso de entrada. Debido al tiempo invariante del sistema, obtenemos una versión de una salida desplazada de la respuesta al impulso.

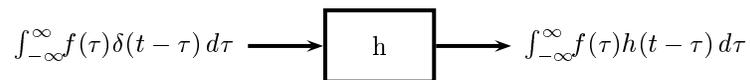


Figure 3: Ahora usamos la parte de escalado de linealidad, escalando el sistemas por un valor, $f(\tau)$, que es constante con respecto al sistema variable, t .

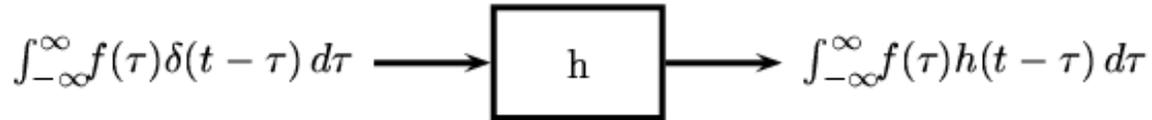


Figure 4: Ahora podemos usar el aspecto de aditividad de linealidad para sumar un número infinito de estos, para cada posible τ . Como una suma infinita es exactamente una integral, terminamos con la integral conocida como integral de convolución. Usando la propiedad de desplazamiento, podemos reconocer el lado izquierdo como la entrada $f(t)$.

4 Proceso II: El método largo

Este método realmente no es muy diferente del anterior, sin embargo es un poco más riguroso y más largo. Esperanzadamente si no se comprendió bien el método de arriba, esto te ayudara para terminar de entender la convolución.

El primer paso en este método es definir una realización particular de la función de impulso unitario⁶.

Para esto usaremos $\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{if } -\frac{\Delta}{2} < t < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

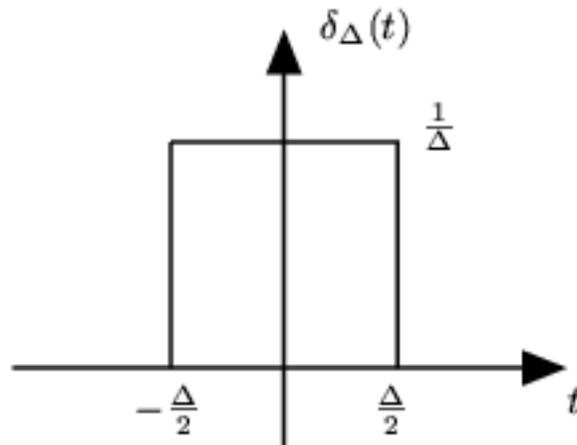


Figure 5: La realización de la función de impulso unitario que usaremos para esta derivación.

⁶"Photo Story 3 Tech Module" <<http://cnx.org/content/m18124/latest/>>

Después de definir la realización de la unidad de respuesta al impulso, podemos obtener nuestra integral de convolución de los siguientes pasos que se encuentran en la siguiente tabla. Notemos que la columna de la izquierda representa la entrada y la columna de la derecha es la salida del sistema dada esa entrada.

Proceso II de la Integral de Convolución

Entrada		Salida
$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$	$\rightarrow h \rightarrow$	$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t)$
$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t - n\Delta)$	$\rightarrow h \rightarrow$	$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h(t - n\Delta)$
$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(n\Delta) \delta_{\Delta}(t - n\Delta) \Delta$	$\rightarrow h \rightarrow$	$\lim_{\Delta \rightarrow 0} f(n\Delta) h(t - n\Delta) \Delta$
$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_n f(n\Delta) \delta_{\Delta}(t - n\Delta) \Delta$	$\rightarrow h \rightarrow$	$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_n f(n\Delta) h(t - n\Delta) \Delta$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$	$\rightarrow h \rightarrow$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$
$f(t)$	$\rightarrow h \rightarrow$	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$

Table 1

5 Implementación de la Convolución

Tomando una visión mas cercana de la integral de convolución, encontramos que estamos multiplicando la señal de entrada por una respuesta al impulso invertida en tiempo e integrándola. Esto nos dará el valor de la salida de un valor dado de t . Si después nosotros cambiamos la respuesta al impulso invertida en tiempo por una pequeña cantidad, obtenemos la salida para otro valor de t . Repitiendo esto para cada posible valor de t , nos da la función total de salida. Nosotros nunca haremos este método a mano, nos proporciona información con algunas entradas de que es lo que esta pasando. Encontramos que esencialmente estamos revirtiendo la función de la respuesta al impulso y desplazándola a través de la función de entrada, integrándola como vamos. Este método, descrito como el **metodo gráfico**, nos proporciona una manera sencilla de resolver las salidas para señales sencillas, mientras tanto mejoraremos nuestra intuición para los casos mas complejos donde confiaremos en las computadoras. De hecho las Texas Instruments⁷ se convierten en Procesamiento Digital de Señales⁸ las cuales tienen un conjunto especial para cómputos así como para la convolución.

Example 1

Esta demostración ilustrara el método gráfico para la convolución. Véase aquí⁹ para las instrucciones de cómo se usa este demo.

This media object is a LabVIEW VI. Please view or download it at
<http://cnx.org/content/m12828/1.4/CT_Convolution.llb>

6 Ejemplos Básicos

Veamos ejemplos de la convolución básica de tiempo-continuo para poder expresar algunas ideas mencionadas anteriormente en el ejemplo corto. Vamos a convolver dos pulsos unitarios, $x(t)$ y $h(t)$.

⁷<http://www.ti.com>

⁸<http://dspvillage.ti.com/docs/toolsoftwarehome.jhtml>

⁹"How to use the LabVIEW demos" <<http://cnx.org/content/m11550/latest/>>

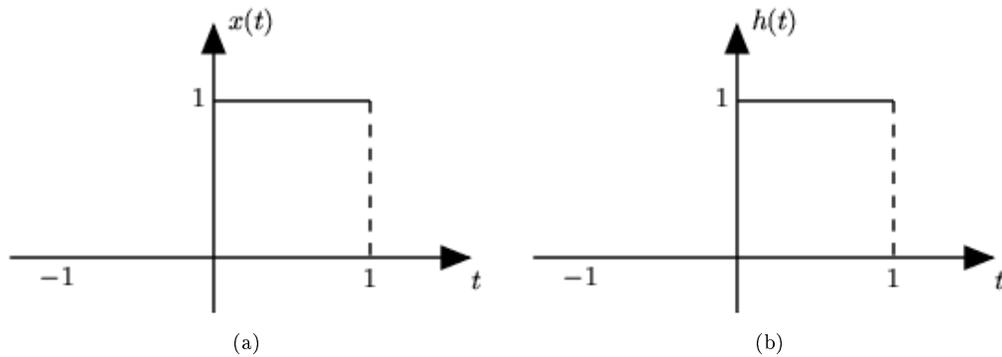


Figure 6: Aquí hay dos señales básicas que usaremos para convolucionar juntas.

6.1 Reflejada y Desplazada

Ahora tomaremos una de las funciones y la reflejaremos a través del eje de las y . Después debemos desplazar la función, así como el origen, el punto de la función que originalmente estaba en el origen, esta marcada como el punto τ . Este paso se muestra en la siguiente figura, $h(t - \tau)$. Como la convolución es conmutativa no importa que función es reflejada y desplazada, sin embargo conforme las funciones se vuelven más complicadas reflejar y desplazar la “correcta” nos hará el problema más sencillo.

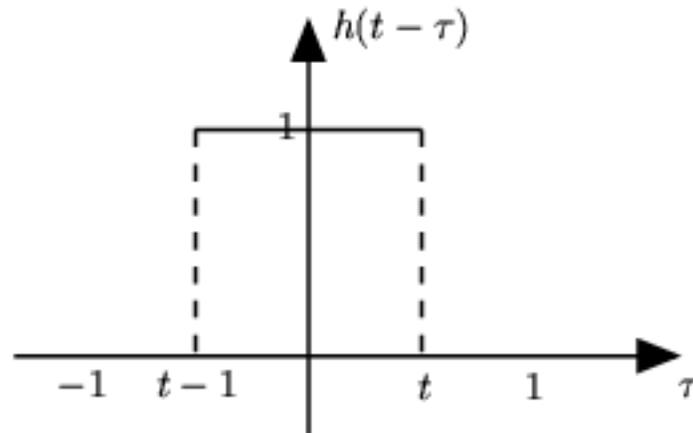


Figure 7: El pulso unitario reflejado y desplazado.

6.2 Regiones de Integración

Ahora veremos la función y dividiremos su dominio en dos límites diferentes de integración. Estas dos regiones diferentes pueden ser entendidas pensando en como nos desplazamos $h(t - \tau)$ sobre la otra función. Si la función fuera mas complicada necesitaremos tener mas limites para que las partes sobrepuestas de las dos funciones puedan ser expresadas en una integral lineal sencilla. Para este problema tendremos las siguientes cuatro regiones. Compárense estos limites de integración con los de los bosquejos de $h(t - \tau)$ y $x(t)$ para ver si se puede entender el por que tenemos cuatro regiones. Nótese que t en los limites de integración se refiere al lado derecho de la función $h(t - \tau)$, marcada como t entre cero y uno en la gráfica.

Los cuatro limites de integración

1. $t < 0$
2. $0 \leq t < 1$
3. $1 \leq t < 2$
4. $t \geq 2$

6.3 Usando la Integral de Convolución

Finalmente estamos listos para unas pequeñas matemáticas. Usando la integral de convolución, integremos el producto de $x(t)h(t - \tau)$. Para la primer y cuarta región es trivial pues siempre será, 0. La segunda región, $0 \leq t < 1$, requiere las siguientes matemáticas:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 1d\tau \\ &= t \end{aligned} \quad (4)$$

La tercer región, $1 \leq t < 2$, Tomemos nota de los cambios en nuestra integración. Conforme movemos $h(t - \tau)$ a través de la otra función, la parte izquierda de la función, $t - 1$, se convierte es nuestro limite inferior para la integral. Esto se muestra a través de la integral de convolución como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-1}^1 1d\tau \\ &= 1 - (t - 1) \\ &= 2 - t \end{aligned} \quad (5)$$

Las formulas anteriores muestran el método para calcular la convolución; sin embargo no deje que la simplicidad de este ejemplo lo confunda cuando trabaje con otros problemas. El método será el mismo, solo se tendrá que tratar con mas matemáticas en integrales mas complicadas.

6.4 Resultados de la Convolución

Así, obtenemos los siguientes resultados para nuestras cuatro regiones:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ t & \text{if } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{if } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{if } t \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

Ahora que encontramos el resultado para cada una de las cuatro regiones, podemos combinarlas y graficar la convolución de $x(t) * h(t)$.

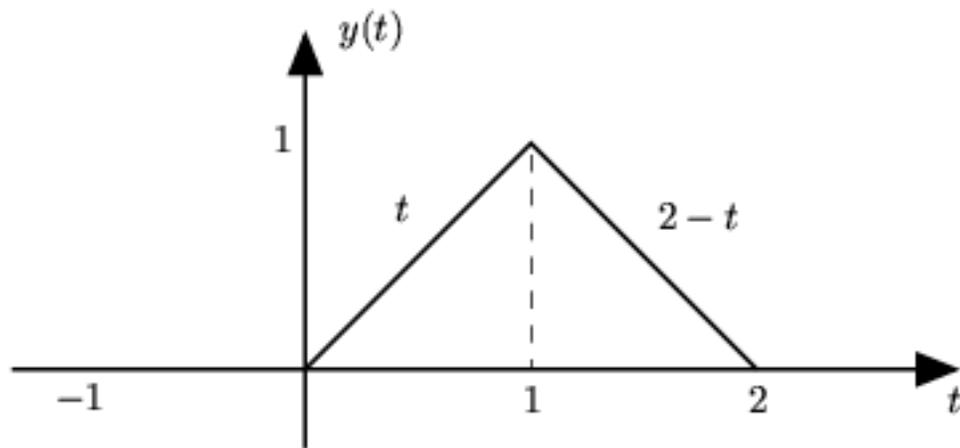


Figure 8: Muestra la respuesta al impulso de la entrada, $x(t)$.
