Eigenfunciones de los Sistemas LTI*

Justin Romberg

Translated By:

Fara Meza

Erika Jackson

Based on *Eigenfunctions of LTI Systems*† by

Justin Romberg

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License ‡

Abstract

Una introducción a los eigenvalores y eigenfunciones para un Sistema Lineal Invariente en el Tiempo.

1 Introducción

Ahora que ya esta familiarizado con la noción de eigenvector de una "matriz de sistema", si no lo esta de un pequeño repaso a lasgeneralidades de eigenvectores y eigenvalores [1]. También podemos convertir las mismas ideas para sistemas LTI actuando en señales. Un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) [2]$\mathcal{H}$ operando en una salida continua $f(t)$ para producir una salida continua en el tiempo $y(t)$

$$\mathcal{H}[f(t)] = y(t) \tag{1}$$

*Version 1.3: Aug 30, 2005 12:35 pm GMT-5

†http://cnx.org/content/m10500/2.7/

‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

[1] "Generalidades de Eigenvectores y Eigenvalores" <http://cnx.org/content/m12872/latest/>

[2] "Introduction to Systems" <http://cnx.org/content/m0005/latest/>

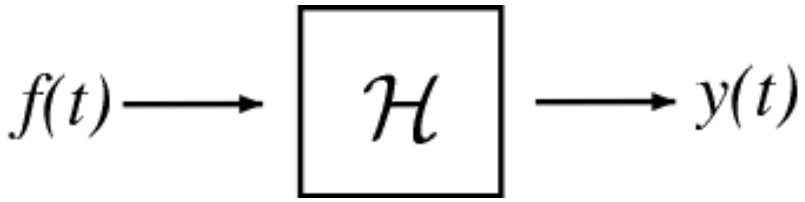

Figure 1: $\mathcal{H}[f(t)] = y(t)$. f y t son señales de tiempo continuo(CT) y $\mathcal{H}$ es un operador LTI.

La matemática es análoga a una matriz A de NxN operando en un vector $x \in \mathbb{C}^N$ para producir otro vector $b \in \mathbb{C}^N$ (véase matrices y sistemas LTI para una descripción).

$$Ax = b \tag{2}$$

Figure 2: $Ax = b$ donde x y b estan en $\mathbb{C}^N$ y A es una matriz de N x N .

Solo como un eigenvector[3] de A es $v \in \mathbb{C}^N$ tal que $Av = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

Figure 3: $Av = \lambda v$ donde $v \in \mathbb{C}^N$ es un eigenvector de A.

podemos definir una **eigenfunción** (o **eigenseñal**) de un sistema LTI $\mathcal{H}$ para ser una señal $f(t)$ tal que

$$\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{C} : (\mathcal{H}[f(t)] = \lambda f(t)) \tag{3}$$

[3] "Eigenvectores y Eigenvalores" <http://cnx.org/content/m12870/latest/>

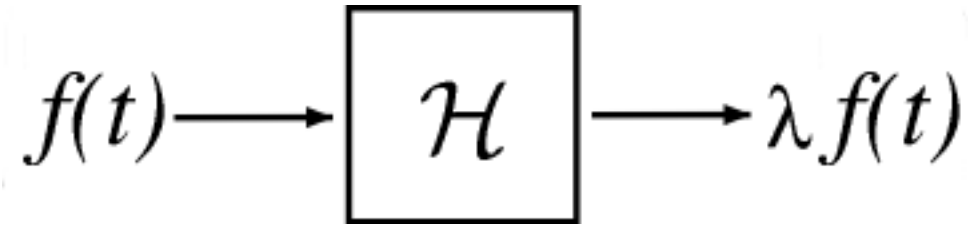

Figure 4: $\mathcal{H}\left[f\left(t\right)\right]=\lambda f\left(t\right)$ donde f es una eigenfunción de $\mathcal{H}$.

Las Eiegenfunciones son las señales mas **simples** possibles para $\mathcal{H}$ π para operar en ellas: para calcular la salida, simplemente multiplicamos la entrada por un número complejo λ.

2 Eigenfunciones para cualquier sistema LTI

La clase de sistemas LTI tiene un conjunto de eigenfunciones en común: el exponencial complejo[4] e^{st}, $s\in\mathbb{C}$ son eigenfunciones para **todo** sistema LTI.

$$\mathcal{H}\left[e^{st}\right]=\lambda_s e^{st} \tag{4}$$

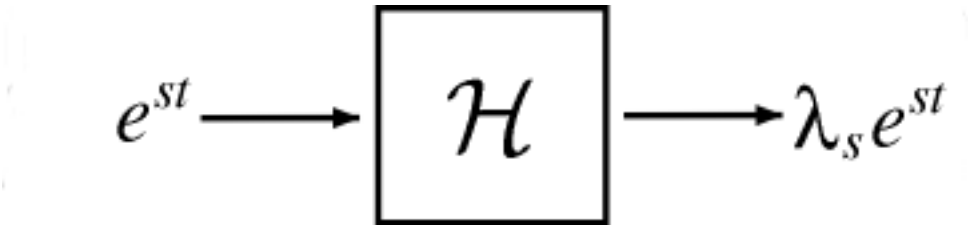

Figure 5: $\mathcal{H}\left[e^{st}\right]=\lambda_s e^{st}$ donde $\mathcal{H}$ es un sistema LTI.

NOTE: Mientras que $\{\forall s, s\in\mathbb{C}:(e^{st})\}$ siempre son eigenfunciones para todo sistema LTI, estas no son necesariamente las **únicas** eigenfunciones.

Podemos probar la (4) expresando la salida como una convolución[5] de la entrada e^{st} y de la respuesta al impulso[6] $h\left(t\right)$ de $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\left[e^{st}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\tau\right) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\tau\right) e^{st} e^{-(s\tau)} d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h\left(\tau\right) e^{-(s\tau)} d\tau\end{aligned} \tag{5}$$

[4] "El Exponencial Complejo" <http://cnx.org/content/m12825/latest/>
[5] "Convolución de Tiempo-Continuo" <http://cnx.org/content/m12828/latest/>
[6] "Función de Impulso" <http://cnx.org/content/m12824/latest/>

Ya que la expresión de la derecha no depende de t, es una constante λ_s; Por lo tanto

$$\mathcal{H}\left[e^{st}\right] = \lambda_s e^{st} \tag{6}$$

El eigenvalor λ_s es un número complejo que depende del exponente s y por supuesto, el sistema $\mathcal{H}$. Para hacer esta dependencia explicita, vamos a usar la notación $H(s) \equiv \lambda_s$.

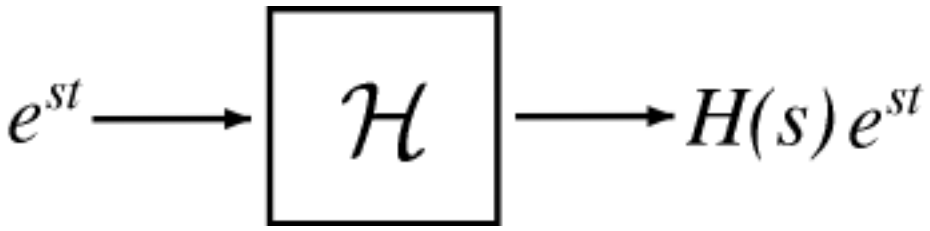

Figure 6: e^{st} es la eigenfunción y $H(s)$ son eigenvalores.

Ya que la acción del operador LTI en esta eigenfunción e^{st} es fácil de calcular y de interpretar, es conveniente representar una señal arbitraria $f(t)$ como una combinación lineal de exponentes complejos. Las Series de Fourier[7] nos dan la representación para una señal periódica continua en el tiempo, mientras que (poco más complicada) transformada de Fourier[8] nos deja expandir señales arbitrarias de tiempo continuo.

[7] "Series de Fourier: El Método de Eigenfunciones" <http://cnx.org/content/m12893/latest/>
[8] "Derivation of the Fourier Transform" <http://cnx.org/content/m0046/latest/>