Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

Michael Haag
Justin Romberg

Translated By:
Fara Meza
Erika Jackson

Based on *Cauchy-Schwarz Inequality*† by
Michael Haag
Justin Romberg

This work is produced by OpenStax-CNX and licensed under the
Creative Commons Attribution License 2.0‡

Abstract

Este modulo define la desigualdad de Cauchy-Schwarz y discute algunos de sus usos prácticos, especialmente en el detector de filtro acoplado. También, provaremos la desigualdad de CS para espacios vectoriales reales.

1 Introducción

Recordando que en $\mathbb{R}^2$, $< x, y >=\| x \| \| y \| \cos(\theta)$

$$| < x, y > | \leq \| x \| \| y \| \tag{1}$$

La misma relación se mantiene para espacios de producto interno[1].

1.1 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Definition 1: Desigualdad de Cauchy-Schwarz
Para x, y en un espacio de producto interno

$$| < x, y > | \leq \| x \| \| y \|$$

*Version 1.2: Aug 30, 2005 12:42 pm -0500
†http://cnx.org/content/m10757/2.5/
‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/
[1]"Producto Interno" <http://cnx.org/content/m12876/latest/>

que mantiene la igualdad **si y solo si** x y y son linealmente dependientes[2], *es decir* $x = \alpha y$ para un escalar α.

2 Detector de Filtro Acoplado

También conocido como una de las aplicaciones de Cauchy-Schwarz.

2.1 Conceptos detrás de los Filtros Acoplados

Dados dos vectores, f y g, entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz CSI (Cauchy-Schwarz Inequality) es **maximizada** cuando $f = \alpha g$. Esto nos dice que:

- f es en la misma "dirección" como g.
- Si f y g son funciones, $f = \alpha g$ significa que f y g tienen la misma forma.

Por ejemplo, suponiendo que tenemos un conjunto de señales, definidas como $\{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t)\}$, y que queremos ser capaces de decir cual, y si alguna de estas señales se asemeja a otra señal dada $f(t)$.

> NOTE: Para poder encontrar las señal(es) que se asemeja a $f(t)$ tomamos el producto interno. Si $g_i(t)$ se asemeja a $f(t)$, entonces el valor absoluto del producto interno, $| < f(t), g_i(t) > |$, será **largo**.

Esta idea de ser capaz de medir el rango de dos señales "semejantes" nos da un **Detector de Filtro Acoplado**.

2.2 Comparando Señales

El simple uso de Filtro Acoplado será tomar un conjunto de "candidatos" de señales, digamos que nuestro conjunto de $\{g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t)\}$, y tratar de acoplarla a nuestra "plantilla" de señal, $f(t)$. Por ejemplo digamos que tenemos las siguientes plantillas (Figure 1 (Señal Platilla)) y señales de candidatos (Figure 2 (Señales Candidatas)):

Señal Platilla

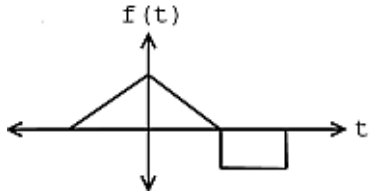

Figure 1: Nuestra señal de la queremos encontrar una semejante a esta.

---

[2] "Algebra Lineal: Conceptos Básicos": Section Independencia Lineal <http://cnx.org/content/m12862/latest/#lin_ind>

Señales Candidatas

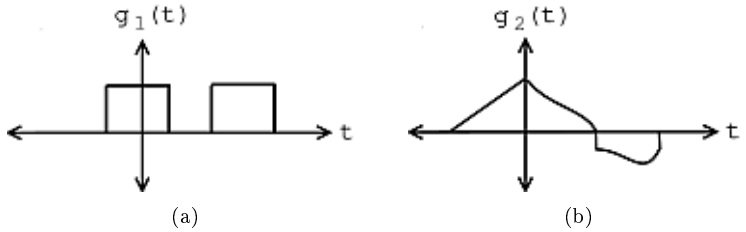

Figure 2: Claramente podemos ver cual de las señales nos dará una mejor semejanza a nuestra señal de platilla.

Ahora si nuestra única pregunta fuera cual de estas funciones se acerca mas $f(t)$ entonces fácilmente tenemos la respuesta basada en la inspección $g_2(t)$. Sin embargo, este no siempre será el caso. También querremos obtener un método o algoritmo que pueda automatizar estas comparaciones. O tal vez queramos tener un valor cuantitativo expresando que tan similares son las señales. Para tratar estas especificaciones, presentaremos un método mas formal para comparar señales, el cual, tal como se menciono anteriormente, esta basado en el producto interno.

Para poder ver cuales de las señales candidatas, $g_1(t)$ ó $g_2(t)$, mejor se asemeja a $f(t)$ % necesitamos realizar los siguientes pasos:

- Normalice $g_i(t)$
- Tome el producto interno con $f(t)$
- Encuentre el más grande

O ponerlo matemáticamente

$$\text{Mejor candidato} = \underset{i}{argmax} \frac{|<f, g_i>|}{\| g_i \|} \tag{2}$$

2.3 Encontrando un Patrón

Extendiendo estos pensamientos del Filtro Acoplado para encontrar semejanzas entre señales, podemos usar la idea de buscar un patrón en una señal larga. La idea es simplemente realizar en varias ocasiones el mismo cálculo como lo hicimos anteriormente; sin embargo, ahora en lugar de calcular en diferentes señales, simplemente realizamos el producto interno con una versión diferente cambiada por nuestra señal patrón. Por ejemplo, digamos que tenemos las siguientes dos señales: una señal patrón (Figure 3 (Señal Patrón)) y una señal larga (Figure 4 (Señal Larga)).

Señal Patrón

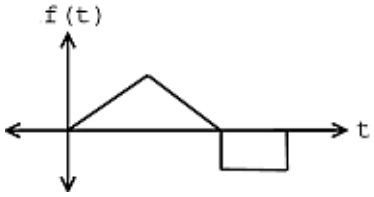

Figure 3: El patrón que estamos buscando en una nuestra señal larga teniendo una longitud T.

Señal Larga

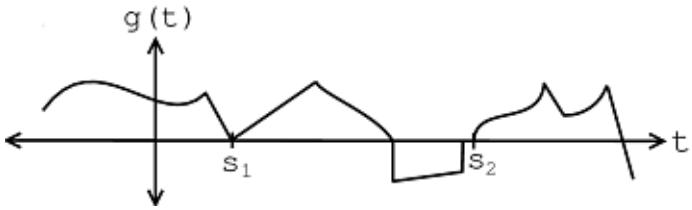

Figure 4: Este es una señal larga que contiene un pieza que ensambla en nuestra señal patrón.

Aquí vemos dos señales cambiadas por nuestra señal patrón, cambiando las señales por s_1 and s_2. Estas dos posibilidades nos dan los siguientes cálculos y resultados:

- Cambio de s_1:

$$\frac{\int_{s_1}^{s_1+T} g(t) f(t-s_1)\, dt}{\sqrt{\int_{s_1}^{s_1+T} (|g(t)|)^2 dt}} = \text{"largo"} \tag{3}$$

- Cambio de s_2:

$$\frac{\int_{s_2}^{s_2+T} g(t) f(t-s_2)\, dt}{\sqrt{\int_{s_2}^{s_2+T} (|g(t)|)^2 dt}} = \text{"pequeo"} \tag{4}$$

Por lo tanto podemos definir una ecuación generalizada para nuestro filtro acoplado:

$$m(s) = \text{filtro acoplado} \tag{5}$$

$$m(s) = \frac{\int_{s}^{s+T} g(t) f(t-s)\, dt}{\| g(t) \| |_{L^2([s,s+T])}} \tag{6}$$

donde el numerado de la (6) es la convolución de $g(t) * f(-t)$. Ahora para poder decidir si o no el resultado de nuestro detector de filtro acoplado es bastante grande para indicar una aceptación correcta entre las dos

señales, definimos **nivel de referencia**. Si

$$m\left(s_0\right) \geq \text{nivel de referencia}$$

después podemos tener una semejanza en la locación s_0.

2.4 Ejemplos Prácticos

2.4.1 Detección de Imagen

En 2-D, este concepto es usado para acoplar imágenes juntas, tal como verificar las huellas digitales para seguridad o para acoplar fotos de alguien. Por ejemplo esta idea puede ser usada para los libros del tan conocido "¿dónde esta Waldo?" si se nos da la siguiente platilla (Figure 5(a)) y una pieza del libro "¿dónde esta Waldo?",(Figure 5(b)),

(a) (b)

Figure 5: Ejemplo de la imagen de ¿Dónde esta Waldo?". Nuestro detector de Filtro Acoplado puede ser implementado para detectar una semejanza posible para Waldo.

Entonces fácilmente podemos crear un programa para encontrar la imagen que más se asemeje a la imagen de la cabeza de Waldo en la figura larga. Simplemente podemos implementar nuestro algoritmo de filtro acoplado: tomar el producto interno de cada cambio y véase que tan larga es nuestra respuesta resultante. Esta idea fue implementada en esta misma imagen para un Proyecto de Señales y Sistemas [3] (véase esta liga para saber mas) en la Universidad de Rice.

2.4.2 Sistemas de Comunicaciones

Los detectores de Filtro Acoplado son usualmente usados en Sistemas de Comunicación[4]. De echo, estos los detectores mas óptimos para el ruido Gaussaniano. Las señales en la vida real también son distorsionadas por el medio ambiente que las rodea, así que es una lucha constante para descubrir maneras capaces de

[3] http://www.owlnet.rice.edu/~elec301/Projects99/waldo/process.html
[4] "Structure of Communication Systems" <http://cnx.org/content/m0002/latest/>

recibir señales torcidas y después ser capaces de filtrarlas de alguna manera para determinar cual era la señal original. Los filtros acoplados nos proveen una manera de comparar la señal recibida con dos posibles señales ("plantilla") y determinar cual es la que más se asemeja a la señal recibida.

Por ejemplo a continuación tenemos un ejemplo simplificado de la Frecuencia Desplazada de Keying [5] (Frequency Shift Keying FSK) donde tenemos las siguientes condiciones para '1' y '0':

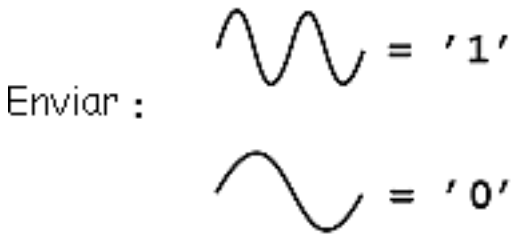

Figure 6: Frecuencia Desplazada de Keying para '1' y '0'.

Basados en la codificación anterior, podemos crear una señal digital basada en 0's y 1's poniendo juntos los dos "códigos" anteriores en número infinito de maneras. Para este ejemplo transmitiremos tres números básicos de 3-bits: 101, desplegado en la siguiente Figure 7:

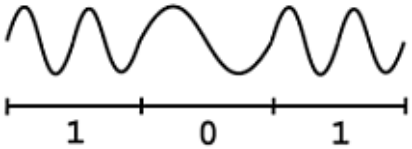

Figure 7: La corriente del bit "101" codificado con el FSK anterior.

Ahora la imagen anterior representa nuestra señal original que será transmitida por algún sistema de comunicación, el cual inevitablemente pasa a través del "canal de comunicación", la parte del sistema que distorsionara y alterara nuestra señal. Mientras que nuestro ruido no sea muy grande, nuestro filtro acoplado nos mantendrá despreocupados de estos cambios de nuestra señal transmitida. Una vez que la señal ha sido recibida, pasamos la señal del ruido a través de un sistema simple, similar a la versión simplificada mostrada a continuación en la Figure 8:

[5] "Frequency Shift Keying" <http://cnx.org/content/m0545/latest/>

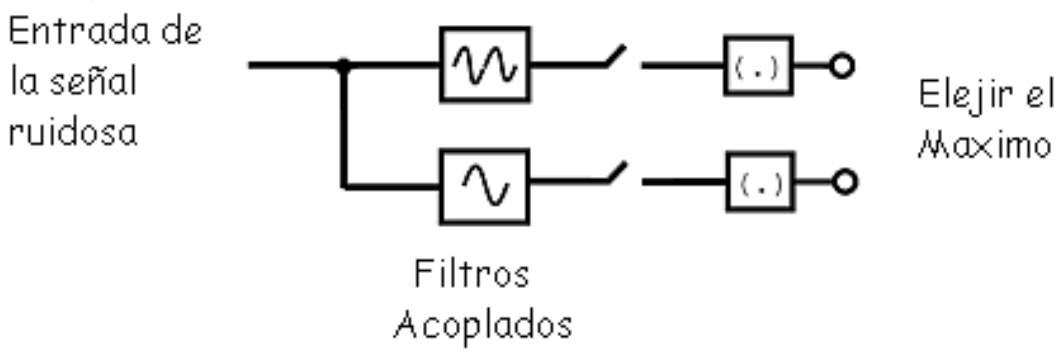

Figure 8: Diagrama de bloque del detector de filtro acoplado.

Figure 8 El diagrama anterior básicamente muestra que nuestra señal con ruido será pasada (asumiremos que pasara un "bit" a la vez) y que esta señal será separada y pasada a través de dos detectores de filtros acoplados diferentes. Cada uno comparara la señal con ruido para cada uno de los códigos que definimos para '1' y '0'. Después este valor será pasado y cualquier valor que sea grande (*es decir* cualquier señal de código FSK a la señal ruidosa que mejor se asemeje) será el valor que el recibidor tome. Por ejemplo, el primer bit que será enviado a través, será un '1' así que el nivel de arriba del diagrama de bloque será el valor más alto, donde denotando que el '1' fue enviado por la señal, aunque la señal aparezca muy ruidosa y distorsionada.

3 Demostración de la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Veremos la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Cauchy-Schwarz Inequality (CSI))para un **espacio vectorial real** .

Rule 1: Desigualdad de Cauchy-Schwarz para un espacio vectorial real
Para $f \in$ Espacio de Hilbert S y $g \in$ Espacio de Hilbert S, mostrar que:

$$| < f, g > | \leq \| f \| \| g \| \tag{7}$$

con la igualdad si y solo si $g = \alpha f$.

Proof:

- Si $g = \alpha f$, mostrar $| < f, g > | = \| f \| \| g \|$

$$| < f, g > | = | < f, \alpha f > | = |\alpha| | < f, f > | = |\alpha| (\| f \|)^2$$

$$| < f, g > | = \| f \| (|\alpha| \| f \|) = \| f \| \| g \|$$

  Esto verifica nuestro argumento anterior de la desigualdad de CS
- Si $g \neq \alpha f$, mostrar $| < f, g > | < \| f \| \| g \|$ donde tenemos $\forall \beta, \beta \in \mathbb{R} : (\beta f + g \neq 0)$

$$0 < (\| \beta f + g \|)^2 = < \beta f + g, \beta f + g > = \beta^2 < (f, f) > + 2\beta < (f, g) > + < g, g >$$

$$\beta^2 (\| f \|)^2 + 2\beta < (f, g) > + (\| g \|)^2$$

Y obtenemos una cuadrática en β. Visualmente el polinomio cuadrático en $\beta > 0$ para todo β. También nótese que el polinomio no tiene raíces reales y que el discriminante es menor que 0...

$$a\beta^2 + b\beta + c$$

tiene discriminante $\beta^2 - 4ac$ donde tenemos:

$$a = (\| f \|)^2$$

$$b = 2 < (f, g) >$$

$$c = (\| g \|)^2$$

Por lo tanto podemos colocar estos valores en el discriminante del polinomio de arriba para obtener:

$$4(| < f, g > |)^2 - 4(\| f \|)^2(\| g \|)^2 < 0 \tag{8}$$

$$| < f, g > | < \| f \| \| g \| \tag{9}$$

Y finalmente hemos probado la formula de la desigualdad de desigualdad de Cauchy-Schwarz para un espacio vectorial real.

NOTE: ¿Qué cambios tenemos que hacer para hacer la demostración para un espacio vectorial complejo? (la respuesta se la dejamos al lector)