Teoremas de Plancharel y Parseval*

Justin Romberg

Translated By:

Fara Meza

Erika Jackson

Based on *Plancharel and Parseval's Theorems*† by

Justin Romberg

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License ‡

Abstract

Este modulo contiene la definición del teorema de Plancharel y del teorema de Parseval con sus demostraciones y ejemplos.

1 Teorema de Plancharel

Theorem 1: Teorema de Plancharel

El producto interno de dos vectores/señales es el mismo que en ℓ^2 el producto interno de su expansión de coeficientes.

Sea $\{b_i\}$ una base ortonormal para un Espacio de Hilbert H. $x \in H$, $y \in H$

$$x = \sum_i \alpha_i b_i$$

$$y = \sum_i \beta_i b_i$$

entonces

$$< x, y >_H = \sum_i \alpha_i \overline{\beta_i}$$

*Version 1.1: Jul 25, 2005 1:12 pm -0500

†http://cnx.org/content/m10769/2.4/

‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Example
Aplicando las Series de Fourier, podemos ir de $f(t)$ a $\{c_n\}$ y de $g(t)$ a $\{d_n\}$

$$\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{d_n}$$

el producto interno en el dominio-tiempo = producto interno de los coefientes de Fourier.
Proof:

$$x = \sum_i \alpha_i b_i$$

$$y = \sum_j \beta_j b_j$$

$$< x, y >_H =< \sum_i \alpha_i b_i, \sum_j \beta_j b_j >= \sum_i \alpha_i < \left(b_i, \sum_j \beta_j b_j\right) >= \sum_i \alpha_i \sum_j \overline{\beta_j} < (b_i, b_j) >= \sum_i \alpha_i \overline{\beta_i}$$

usando las reglas del producto interno[1].

NOTE: $< b_i, b_j >= 0$ cuando $i \neq j$ y $< b_i, b_j >= 1$ cuando $i = j$

Si el espacio de Hillbert H tiene un ONB, los productos internos son equivalentes a los productos internos en ℓ^2.
Todo H con ONB son de alguna manera equivalente a ℓ^2.

NOTE: las secuencias de cuadrados sumables son importantes.

2 Teorema de Parseval

Theorem 2: Teorema de Parseval
La energía de una señal = suma de los cuadrados de su expansión de coeficientes.
Sea $x \in H$, $\{b_i\}$ ONB

$$x = \sum_i \alpha_i b_i$$

Entonces

$$(\| x \|_H)^2 = \sum_i (|\alpha_i|)^2$$

Proof:
Directamente de Plancharel

$$(\| x \|_H)^2 = < x, x >_H = \sum_i \alpha_i \overline{\alpha_i} = \sum_i (|\alpha_i|)^2$$

[1] "Producto Interno" <http://cnx.org/content/m12876/latest/#list_rules>

Example

Series de Fourier $\frac{1}{\sqrt{T}}e^{iw_0nt}$

$$f\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{n}c_n\frac{1}{\sqrt{T}}e^{iw_0nt}$$

$$\int_0^T\left(\left|f\left(t\right)\right|\right)^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left|c_n\right|\right)^2$$