Convergencia de las Series de Fourier*

Michael Haag
Justin Romberg

Translated By:
Fara Meza
Erika Jackson

Based on *Convergence of Fourier Series*† by
Michael Haag
Justin Romberg

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License ‡

Abstract

Este módulo describe la convergencia de las Series de Fourier, para mostrar que pueden ser una buena aproximación para todas las señales.

1 Introducción

Antes de ver este módulo, esperamos que usted este completamente convencido que **cualquier**función periódica $f(t)$, se puede representar como una suma de senosoidales complejos[1]. Si usted no lo esta, intente ver la sección de generalidades de eigenfunciones[2] o de eigenfunciones de los sistemas LTI[3]. Hemos demostrado que podemos representar la señal como una suma de exponenciales usando las ecuaciones de las series de Fourier[4] mostradas aquí:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_0 nt} \tag{1}$$

*Version 1.2: Jan 26, 2007 9:28 pm US/Central
†http://cnx.org/content/m10745/2.3/
‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/
[1]"Señales Útiles" <http://cnx.org/content/m12819/latest/>
[2]"Generalidades de Eigenvectores y Eigenvalores" <http://cnx.org/content/m12872/latest/>
[3]"Eigenfunciones de los Sistemas LTI" <http://cnx.org/content/m12874/latest/>
[4]"Series de Fourier: El Método de Eigenfunciones" <http://cnx.org/content/m12893/latest/>

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-(i\omega_0 nt)}dt \tag{2}$$

Joseph Fourier[5] insistió que estas ecuaciones eran verdaderas, pero nunca las pudo probar. Lagrange ridiculizó públicamente a Fourier y dijo que solo funciones continuas podrían ser representadas como (1) (así que probo que la (1) funciona para funciones continuas en el tiempo). Sin embargo, nosotros sabemos que la verdad se encuentra entre las posiciones que Fourier y Lagrange tomaron.

2 Comprendiendo la Verdad

Formulando nuestra pregunta matemáticamente, deje

$$f_N{}'(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\omega_0 nt}$$

donde c_n es igual a los coeficientes de Fourier, $f(t)$. (vea (2)).

$f_N{}'(t)$ es la "reconstrucción parcial" de $f(t)$ usando los primeros $2N+1$ coeficientes de Fourier. $f_N{}'(t)$**se aproxima** a $f(t)$, con la aproximación mejorando cuando N se vuelve grande. Así que, podemos pensar que el conjunto $\left\{\forall N, N = \{0,1,\dots\} : \left(\frac{df_N(t)}{d}\right)\right\}$ es una **secuencia de funciones**, cada una aproximando $f(t)$ mejor que la anterior.

La pregunta se convierte en , ¿sí esta secuencia converge a $f(t)$? ¿ $f_N{}'(t) \to f(t)$ asi como a $N \to \infty$? Trataremos de responder estas preguntas al ver la convergencia de dos maneras diferentes:

1. Viendo la **energía** de la señal de error:

$$e_N(t) = f(t) - f_N{}'(t)$$

2. Viendo el $\lim_{N\to\infty} \frac{df_N(t)}{d}$ en **cada** punto y comparándolo con $f(t)$.

2.1 Primer Método

Sea $e_N(t)$ la diferencia (i.e. error) entre la señal $f(t)$ y su reconstrucción parcial $f_N{}'(t)$

$$e_N(t) = f(t) - f_N{}'(t) \tag{3}$$

Si $f(t) \in L^2([0,T])$ (energía finita), entonces la energía de $e_N(t) \to 0$ cuando $N \to \infty$ es

$$\int_0^T (|e_N(t)|)^2 dt = \int_0^T \left(f(t) - f_N{}'(t)\right)^2 dt \to 0 \tag{4}$$

Podemos comprobar esta ecuación usando la relación de Perseval al:

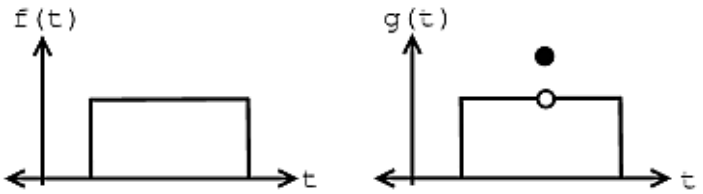
$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \left(|f(t) - f_N{}'(t)|\right)^2 dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left(|\mathcal{F}_n(f(t)) - \mathcal{F}_n\left(\frac{df_N(t)}{d}\right)|\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|>N} (|c_n|)^2 = 0$$

Donde la ecuación antes del cero es la suma de la última parte de las series de Fourier. La cual se aproxima a cero por que $f(t) \in L^2([0,T])$. Ya que el sistema físicos responden a la energía, las series de Fourier proveen una representación adecuada para todo $f(t) \in L^2([0,T])$ igualando la energía finita sobre un punto.

[5] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html

2.2 Segundo Método

El hecho de que $e_N \to 0$ no nos dice nada sobre que $f(t)$ y $\lim_{N\to\infty} \frac{df_N(t)}{d}$ sean **iguales** en cierto punto. Tomemos las siguientes funciones como un ejemplo:



(a) (b)

Figure 1

Dadas estas dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, podemos observar que para todo t, $f(t) \neq g(t)$, pero

$$\int_0^T (|f(t) - g(t)|)^2 dt = 0$$

De esto podemos derivar las siguientes relaciones:

Convergencia de energa $\neq$ convergencia de punto por punto

Convergencia de punto por punto $\Rightarrow$ convergencia en $\mathrm{L}^2([0,T])$

Sin embargo, lo contrario de la proposició no es cierto.

Resulta que si $f(t)$ tiene una **discontinuidad** (como se puede observar en la figura de $g(t)$) en t_0, entonces

$$f(t_0) \neq \lim_{N\to\infty} \frac{df_N(t_0)}{d}$$

Mientras $f(t)$ tenga algunas de las condiciones, entonces

$$f(t') = \lim_{N\to\infty} \frac{df_N(t')}{d}$$

si $f(t)$ es **continua** en $t = t'$.