# Convergencia Uniforme de Secuencias de Funciones.*

Michael Haag
Richard Baraniuk

Translated By:
Fara Meza
Erika Jackson

Based on *Uniform Convergence of Function Sequences*† by
Michael Haag
Richard Baraniuk

This work is produced by OpenStax-CNX and licensed under the
Creative Commons Attribution License 2.0‡

**Abstract**

Otra forma de convergencia, convergencia uniforme es definida y descrita en este modulo. También se muestra su relación con la convergencia puntual.

## 1 Convergencia Uniforme de Secuencias de Funciones

para esta discusión, solo consideraremos las funciones con $g_n$ donde

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

**Definition 1: Convergencia Uniforme**
La secuencia$\{g_n\}|_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la funció $g$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero $N$ tal que $n \geq N$ implica que

$$|g_n(t) - g(t)| \leq \epsilon \tag{1}$$

para **todo**$t \in \mathbb{R}$.

*Version 1.1: Jul 27, 2005 2:29 pm -0500
†http://cnx.org/content/m10895/2.5/
‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Obviamente toda secuencia uniformemente continua es de convergencia puntual . La diferencia entre convergencia puntual y uniformemente continua es esta: Si $\{g_n\}$ converge puntualmente a $g$, entonces para todo $\epsilon > 0$ y para toda $t \in \mathbb{R}$ hay un entero $N$ que depende de $\epsilon$**y**$t$ tal que (1) se mantiene si $n \geq N$. Si $\{g_n\}$ converge uniformemente a $g$, es posible que para cada $\epsilon > 0$ enocntrar **un** entero $N$ que será par todo $t \in \mathbb{R}$.

**Example 1**

$$\forall t, t \in \mathbb{R} : \left( g_n(t) = \frac{1}{n} \right)$$

Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces escoja $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$. Obviamente,

$$\forall n, n \geq N : (|g_n(t) - 0| \leq \epsilon)$$

para toda $t$. Así, $g_n(t)$ converge uniformemente a 0.

**Example 2**

$$\forall t, t \in \mathbb{R} : \left( g_n(t) = \frac{t}{n} \right)$$

Obviamente para cualquier $\epsilon > 0$ no podemos encontrar una función sencilla $g_n(t)$ para la cual la (1) se mantiene con $g(t) = 0$ para todo $t$. Así $g_n$ no es convergente uniformemente. Sin embargo tenemos:

$$g_n(t) \to g(t) \text{ puntual}$$

NOTE: La convergencia uniforme siempre implica convergencia puntual, pero la cpnvergencia puntual no necesariamente garantiza la convergencia uniforme.

## 1.1 Problems

Pruebe rigurosamente si las siguientes funciones convergen puntualmente o uniformemente, o ambas.

1. $g_n(t) = \frac{\sin(t)}{n}$
2. $g_n(t) = e^{\frac{t}{n}}$
3. $g_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{nt} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$