Entendiendo las Graficas de Polos y Ceros en el Plano-Z*

Michael Haag

Translated By:

Fara Meza

Erika Jackson

Based on *Understanding Pole/Zero Plots on the Z-Plane*† by

Michael Haag

Abstract

Aqui veremos la relacion entre la transformada-z y el plano complejo. especificamente, la creacion de graficas de polos/ceros y algunas de sus propiedades.

1 Introducción a los Polos y Ceros de la Trasformada-z

Después de encontrar la transformada-z del sistema, uno puede usar la información del polinomio para representar la función gráficamente y así observar sus características. La transformada-z tendrá la siguiente estructura, basada en las funciones racionales[1]:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{1}$$

Los dos polinomios, $P(z)$ y $Q(z)$, nos dejan encontrar los polos y ceros[2] de la transformada-z.

Definition 1: ceros

1. valor(es) de z donde $P(z) = 0$.
2. Las frecuencias complejas que hacen que la ganancia de la función de transferencia del filtro sea cero.

*Version 1.1: Aug 2, 2005 11:57 pm GMT-5

†http://cnx.org/content/m10556/2.8/

‡http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

[1] "Funciones Racionales" <http://cnx.org/content/m12960/latest/>

[2] "Polos y Ceros" <http://cnx.org/content/m12963/latest/>

Definition 2: polos
1. valor(es) de z donde $Q(z) = 0$.
2. Las frecuencias complejas que hacen que la ganancia de la función de transferencia del filtro sea infinita.

Example 1
Esta es la función de transferencia con polos y ceros.

$$H(z) = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

Los ceros son: $\{-1\}$
Los polos son: $\left\{\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$

2 El Plano-z

Después de encontrar los polos y ceros de una trasformada-z, se pueden graficar en el plano-z. El plano-z es un plano complejo con ejes reales e imaginarios para la variable compleja de z. La posición del plano complejo es dada por $re^{i\theta}$ y el ángulo se da del lado positive del eje real del plano y se escribe θ. Al graficar los polos y ceros, los polos son mostrados con "x" y los ceros con "o". La siguiente figura muestra el plano-z, así como algunos ejemplos de como graficar polos y ceros en algún lugar particular en el plano.

Plano-Z

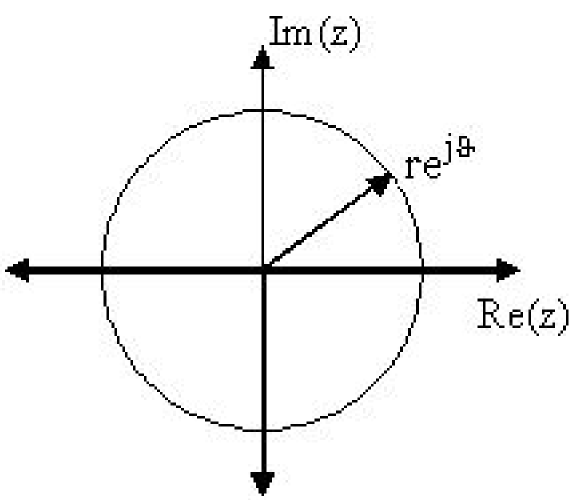

Figure 1

3 Ejemplos de Graficas de Polos y Ceros

Esta sección contiene ejemplos de como encontrar polos y ceros de una función de transferencia y el como graficarlos en el plano-z.

Example 2: Grafica Simple de Polos y Ceros

$$H(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

Los ceros son: $\{0\}$
Los polos son: $\left\{\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$

Graficas de Polos y Ceros

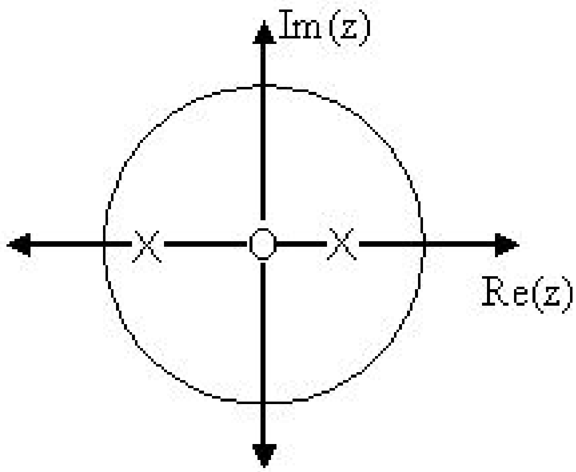

Figure 2: Usando los ceros y polos de la funcion de transferencia, un cero es graficado a el valor cero y los dos polos se colocan en $\frac{1}{2}$ y $-\left(\frac{3}{4}\right)$

Example 3: Grafica Compleja de Polos y Ceros

$$H(z) = \frac{(z - i)(z + i)}{\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right)\left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$

Los ceros son: $\{i, -i\}$
Los polos son: $\left\{-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

Graficas de Polos y Ceros

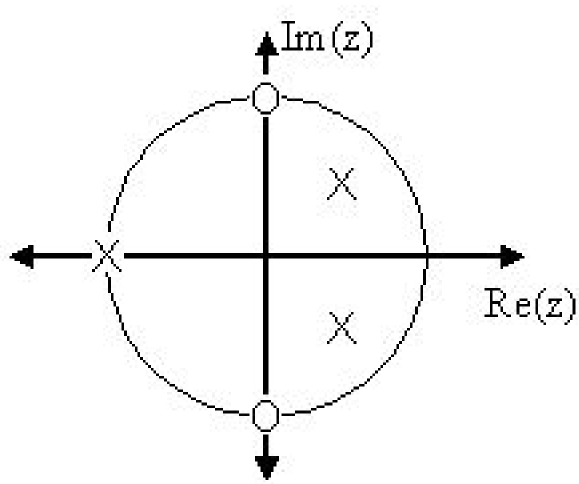

Figure 3: Usando los ceros y polos de la funcion de transferencia, los ceros son graficados en $\pm i$, los polos son colocados en -1, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ y $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

MATLAB- si se usa este programa, entonces usted podrá usar funciones que crean este tipo de graficas rápidamente. Abajo se muestra un programa que grafica polos y ceros del ejemplo anterior.

```
% Set up vector for zeros
z = [j ; -j];

% Set up vector for poles
p = [-1 ; .5+.5j ; .5-.5j];

figure(1);
zplane(z,p);
title('Pole/Zero Plot for Complex Pole/Zero Plot Example');
```

4 Graficas de Polos y Ceros y la Región de Convergencia

La región de convergencia (ROC) para $X(z)$ en el plano-z de puede determinar de la grafica de polos y ceros. Aunque varias ROC pueden existir, donde cada una corresponde a una respuesta al impulse diferente, existen opciones que son mas practicas. Un ROC se puede escoger para hacer la función de transferencia causal y/o estable dependiendo de la grafica de polos y ceros.

Propiedades de Filtro Sacadas de la ROC

- Si la ROC se extiende hacia afuera desde su ultimo polo, entonces el sistema es **causal**.
- Si la ROC incluye el círculo unitario, entonces el sistema es **estable**.

La siguiente grafica es un posible ROC para la transformada-z del ejemplo grafica simple de polos y ceros (Example 2: Grafica Simple de Polos y Ceros) la región mostrada indica la ROC elegida para el filtro. Podemos inferior que el filtro será causal y estable ya que tiene las propiedades mencionadas anteriormente.

Example 4

$$H(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

La región de convergencia para la grafica de polos y ceros

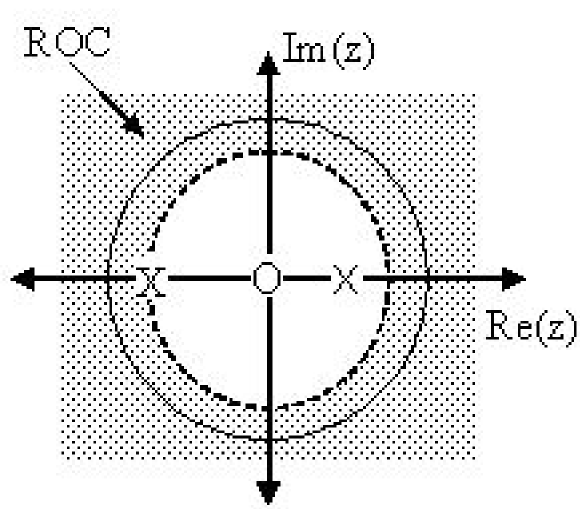

Figure 4: La area representa la ROC para la funcion de transferencia.

5 Respuesta de Frecuencia y el Plano-Z

La razón por lo cual es importante el entender y crear las graficas de polos y ceros es su habilidad de ayudar en el diseño de filtros. Basado en la locación de los polos y ceros, la respuesta de la magnitud del filtro se puede comprender. Al empezar con este tipo de grafica, uno puede diseñar un filtro y obtener su función de transferencia fácilmente. Vea esta sección[3] para obtener información sobre la relación de la grafica de polos y ceros con la respuesta de frecuencia.

[3] "Filter Design using the Pole/Zero Plot of a Z-Transform" <http://cnx.org/content/m10548/latest/>