Algoritmo de Goertzel*

Andres Romero Mier y Terán

This work is produced by OpenStax-CNX and licensed under the
Creative Commons Attribution License 2.0†

Abstract

Introducción al funcionamiento del Algoritmo de Goertzel y a su implementación en un DSP

A pesar del ahorro de recursos que la FFT (Transformada Rápida de Fourier) consigue en comparación con la DFT ordinaria (Transformada Discreta de Fourier), para algunas aplicaciones simplemente se requiere calcular el espectro para algunas frecuencias de interés. Un ejemplo de esto se tiene en la demodulación FSK, en las cuales únicamente dos frecuencias son empleadas para transmitir datos binarios, otro ejemplo es matriz DTMF (Dual Tone Multifrequency) de los teléfonos con marcación por tonos.

Para estas aplicaciones el algoritmo de Goertzel reduce la cantidad de operaciones en números reales en casi la mitad en relación con el cálculo directo de la DFT.

El algoritmo de Goertzel se obtiene como una adaptación de la ecuación de la DTF, equivalente a una convolución que puede ser implementada mediante un filtro digital.

A partir de las constantes de la DFT tenemos que

$$e^{-\left(j\frac{2\pi k}{N}\right)} = W_N^k \tag{1}$$

y considerando que

$$W_N^{-Nk} = 1 \tag{2}$$

podemos escribir la ecuación de la DFT de manera equivalente a

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, 1 W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{-Nk} W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{-k(N-n)} \end{aligned} \tag{3}$$

expandiendo la sumatoria tenemos

$$X(k) = \left(\left(\left(W_N^{-k} x(0) + x(1)\right) W_N^{-k} + x(2)\right) W_N^{-k} + \cdots + x(N-1)\right) W_N^{-k} \tag{4}$$

esta ecuación en diferencias puede ser escrita en forma recursiva como

$$y(n) = W_N^{-k} y(n-1) + x(n) \tag{5}$$

*Version 1.2: Apr 28, 2008 1:18 pm -0500

†http://creativecommons.org/licenses/by/2.0/

en donde

$$\begin{aligned} y(0) &= W_N^{-k} x(0) \\ y(1) &= W_N^{-k} y(0) + x(1) \\ y(2) &= W_N^{-k} y(1) + x(2) \\ &\vdots \\ y(N-1) &= W_N^{-k} y(N-2) + x(N-1) \end{aligned} \tag{6}$$

para las condiciones iniciales de funcionamiento $y(-1) = 0$.

De esta manera el coeficiente de la DFT para k es equivalente a la salida de la ecuación en diferencias en el tiempo $n = N - 1$.

$$X(k) = y(N-1) \tag{7}$$

Expresando la ecuación en diferencias como una función de transferencias tenemos

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - W_N^{k} z^{-1}}{1 - \left(\left(W_N^{k} + W_N^{-k}\right) z^{-1} + z^{-2}\right)} = \frac{1 - W_N^{k} z^{-1}}{1 - \left(2cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + z^{-2}\right)} \tag{8}$$

Esta función de transferencias representa a un filtro IIR

De esta manera, y entendiendo que cada valor de k se encuentra relacionado con una banda del espectro de frecuencias de la señal $x(n)$, podemos obtener la energía únicamente en las bandas que nos interesan y ahorrar cálculos en bandas no requeridas.