

TRIGONOMETRIE: TRIG IDENTITEITE (GRAAD 11)*

Free High School Science Texts Project

Based on *Trigonometry: Trig identities (Grade 11)*[†] by
Free High School Science Texts Project

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License [‡]

1 Trigonometriese Identiteite

1.1 Afleiding van Waardes vir Trigonometriese Funksies vir : 30°, 45° and 60°

Hou in gedagte dat die trigonometriese funksies slegs van toepassing is op reghoekige driehoeke. Dus kan ons waardes aflei vir trigonometriese funksies vir 30°, 45° en 60°. Ons sal begin met 45° omdat dit die maklikste is.

Neem enige reghoekige driehoek met een hoek 45°. Dus omdat een hoek gelyk is aan 90°, moet die derde hoek ook gelyk wees aan 45°. Ons het dus 'n gelyksydige reghoekige driehoek soos aan gedui in Figure 1.

Image not finished

Figure 1: 'n Gelyksydige reghoekige driehoek

As die twee sye gelyk is in lengte aan a , dan kan die skuinssy h , soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}
 h^2 &= a^2 + a^2 \\
 &= 2a^2 \\
 \therefore h &= \sqrt{2}a
 \end{aligned} \tag{1}$$

*Version 1.1: Jul 30, 2011 7:13 am -0500

[†]<http://cnx.org/content/m38868/1.1/>

[‡]<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>

Dus het ons:

$$\begin{aligned}\sin(45^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(45^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(45^\circ) &= \frac{\text{aanliggende}(45^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\tan(45^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(45^\circ)}{\text{aanliggende}(45^\circ)} \\ &= \frac{a}{a} \\ &= 1\end{aligned}\tag{4}$$

Ons kan iets soortgelyks probeer vir 30° en 60° . Ons begin met 'n gelyksydige driehoek en halveer een hoek soos aangedui in Figure 2. Dit gee ons die verlangde reghoekige driehoek met een hoek gelyk aan 30° en een hoek gelyk aan 60° .

Image not finished

Figure 2: 'n Gelyksydige driehoek met een hoek gehalveer.

As die gelyke sye se lengte gelyk is aan a , dan is die basis gelyk aan $\frac{1}{2}a$ en die lengte van die vertikale sy v kan dan soos volg bereken word:

$$\begin{aligned}v^2 &= a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \\ &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ &= \frac{3}{4}a^2 \\ \therefore v &= \frac{\sqrt{3}}{2}a\end{aligned}\tag{5}$$

Dus het ons:

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(30^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\cos(30^\circ) &= \frac{\text{aanliggende}(30^\circ)}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \tan(30^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(30^\circ)}{\text{aanliggende}(30^\circ)} \\
 &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(60^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(60^\circ)}{\text{skuinssy}} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(60^\circ) &= \frac{\text{aanliggende}(60^\circ)}{\text{skuinssy}} \\
 &= \frac{\frac{a}{2}}{a} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \tan(60^\circ) &= \frac{\text{teenoorstaande}(60^\circ)}{\text{aanliggende}(60^\circ)} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Jy hoef nie hierdie identiteite te memoriseer nie as jy weet hoe om hulle af te lei.

TIP:

Image not finished

Figure 3

1.2 Alternatiewe definisie vir $\tan\theta$

Ons weet dat $\tan\theta$ soos volg gedefinieer word: $\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}}$. Dit kan soos volg geskryf word:

$$\begin{aligned}
 \tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{skuinssy}} \\
 &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aanliggende}}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Maar ons weet ook dat $\sin\theta$ soos volg gedefinieer word: $\sin\theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}}$ en dat $\cos\theta$ soos volg gedefinieer word: $\cos\theta = \frac{\text{aanliggende}}{\text{skuinssy}}$.

Daarom kan ons dit soos volg skryf:

$$\begin{aligned}
 \tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} \times \frac{\text{skuinssy}}{\text{aanliggende}} \\
 &= \sin\theta \times \frac{1}{\cos\theta} \\
 &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}
 \end{aligned} \tag{13}$$

TIP: $\tan\theta$ kan ook soos volg gedefinieer word: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

1.3 'n Trigonometriese Identiteit

Een van die mees bruikbare resultate van die trigonometriese funksies is dat hulle verwant aan mekaar is. Ons het gesien dat $\tan\theta$ geskryf kan word in terme van $\sin\theta$ en $\cos\theta$. Net so sal ons wys dat: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ons begin deur te kyk na $\triangle ABC$,

Image not finished

Figure 4

Ons sien dat: $\sin\theta = \frac{AC}{BC}$ en $\cos\theta = \frac{AB}{BC}$.

Volgens die stelling van Pythagoras weet ons dat: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Daarom kan ons die volgende neerskryf:

$$\begin{aligned}
 \sin^2\theta + \cos^2\theta &= \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \\
 &= \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2} \\
 &= \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} \\
 &= \frac{BC^2}{BC^2} \quad (\text{volgens Pythagoras}) \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{14}$$

Exercise 1: Trigonometriese Identiteite A

(Solution on p. 6.)

Vereenvoudig deur identiteite te gebruik:

1. $\tan^2\theta \cdot \cos^2\theta$
2. $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta$

Exercise 2: Trigonometriese Identiteite B

(Solution on p. 6.)

Bewys: $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

1.3.1 Trigonometriese identiteite

1. Vereenvoudig die volgende met behulp van die basiese trigonometriese identiteite:

- a. $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$
- b. $\cos^2\theta \cdot \tan^2\theta + \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$
- c. $1 - \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$
- d. $1 - \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \tan\theta$
- e. $1 - \sin^2\theta$
- f. $\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right) - \cos^2\theta$

2. Bewys die volgende:

- a. $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$
- b. $\sin^2\theta + (\cos\theta - \tan\theta)(\cos\theta + \tan\theta) = 1 - \tan^2\theta$
- c. $\frac{(2\cos^2\theta-1)}{1} + \frac{1}{(1+\tan^2\theta)} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$
- d. $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\tan^2\theta}{1} = 1$

e. $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sin\theta + \cos\theta - \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

f. $\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \tan\theta\right) \cdot \cos\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

Solutions to Exercises in this Module

Solution to Exercise (p. 4)

Step 1.

$$\begin{aligned}
 &= \tan^2\theta \cdot \cos^2\theta \\
 &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta \\
 &= \sin^2\theta
 \end{aligned} \tag{15}$$

Step 2.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta \\
 &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
 &= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
 &= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1
 \end{aligned} \tag{16}$$

Solution to Exercise (p. 4)

Step 1.

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \frac{1-\sin x}{\cos x} \\
 &= \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \\
 &= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} \\
 &= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} \\
 &= \frac{\cos x}{1+\sin x} = \text{RHS}
 \end{aligned} \tag{17}$$