Trigonometrie: grafieke van trigonometriese funksies (Grade 11)*

Free High School Science Texts Project

Based on *Trigonometry: Graphs of trig functions (Grade 11)*† by

Free High School Science Texts Project

This work is produced by OpenStax-CNX and licensed under the
Creative Commons Attribution License 3.0‡

1 Die Geskiedenis van Trigonometrie

Werk twee-twee of in groepe en ondersoek die geskiedenis van trigonometrie. Beskryf die verskillende stappe van die ontwikkeling en hoe verskillende kulture trigonometire gebruik om hulle lewens te verbeter.

Die werk van die volgende mense of kulture kan ondersoek word:

1. Kulture
   a. Antieke Egiptenare
   b. Mesopotamië
   c. Antieke Indiërs van die Indusvallei
2. Mense
   a. Lagadha (ongeveer 1350-1200 vC)
   b. Hipparchus (ongeveer 150 vC)
   c. Ptolemy (ongeveer 100)
   d. Aryabhata (ongeveer 499)
   e. Omar Khayyam (1048-1131)
   f. Bhaskara (ongeveer 1150)
   g. Nasir al-Din (13de eeu)
   h. al-Kashi en Ulugh Beg (14de eeu)
   i. Bartholemaeus Pitiscus (1595)

*Version 1.1: Jul 30, 2011 7:57 am +0000
†http://cnx.org/content/m38866/1.1/
‡http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

2 Grafieke van Trigonometriese Funksies

2.1 Funksies van die vorm $y = sin\,(k\theta)$

In die vergelyking, $y = sin\,(k\theta)$, is k 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van so 'n grafiek word gegee in Figure 1 vir die funksie $f\,(\theta) = sin\,(2\theta)$.

Image not finished

Figure 1: Grafiek van $f\,(\theta) = sin\,(2\theta)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = sin\,(\theta)$ (stippellyn).

2.1.1 Funksies van die vorm $y = sin\,(k\theta)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = sin0,5\theta$
2. $b\,(\theta) = sin1\theta$
3. $c\,(\theta) = sin1,5\theta$
4. $d\,(\theta) = sin2\theta$
5. $e\,(\theta) = sin2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k die periode of frekwensie affekteer. Let op dat in die geval van die sinus grafiek, die periode (lengte van een golf) gegee word deur $\frac{360°}{k}$.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 1.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 2**	

Table 1: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = sin\,(kx)$ opsom. Die kurwe van $y = sin\,(x)$ word voorgestel deur die stippel lyn.

2.1.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\,(\theta) = sin\,(k\theta)$ is die definisieversameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde van $\theta \in \mathbb{R}$ is waarvoor $f\,(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waardeversameling van $f\,(\theta) = sin\,(k\theta)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in [-1, 1]\}$.

2.1.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = sin\,(k\theta)$, word die nodige inligting om die afsnit met betrekking tot die y as gegee.

Daar is baie x-afsnitte.

Die y-afsnit word bereken deur $\theta = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= sin\,(k\theta) \\ y_{\text{afsnit}} &= sin\,(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

2.2 Funksies van die vorm $y = cos\,(k\theta)$

In die vergelyking $y = cos\,(k\theta)$, is k 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksies. Die algemene vorm van die grafiek van hierdie soort funksies word gegee in Figure 4 vir die funksie $f\,(\theta) = cos\,(2\theta)$.

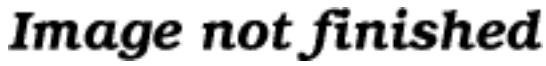

Figure 4: Grafiek van $f\,(\theta) = cos\,(2\theta)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = cos\,(\theta)$ (stippellyn).

2.2.1 Funksies van die vorm $y = cos\,(k\theta)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = cos0,5\theta$
2. $b\,(\theta) = cos1\theta$
3. $c\,(\theta) = cos1,5\theta$
4. $d\,(\theta) = cos2\theta$
5. $e\,(\theta) = cos2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k affekteer die periode of frekwensie van die grafiek. Die periode van die cosinus grafiek word gegee deur $\frac{360^\circ}{k}$.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 2.

$k > 0$	$k < 0$
	continued on next page

Image not finished **Figure 5**	

Table 2: Tabel wat die algemene vorms en posisies van grafieke van funksie in die vorm $y = cos\,(kx)$ opsom. Die kurwe van $y = cos\,(x)$ is geplot met die stippel lyn.

2.2.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\,(\theta) = cos\,(k\theta)$, is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde is van $\theta \in \mathbb{R}$ waarvoor $f\,(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = cos\,(k\theta)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in [-1, 1]\}$.

2.2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = cos\,(k\theta)$, word die metode om die afsnitte met die y-as te bereken gegee.

Die y-afsnit word as volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= cos\,(k\theta) \\ y_{\text{afsnit}} &= cos\,(0) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

2.3 Funksies van die vorm $y = tan\,(k\theta)$

In die vergelyking $y = tan\,(k\theta)$, is k 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van die soort funksie word gewys in Figure 7 for the function $f\,(\theta) = tan\,(2\theta)$.

Image not finished

Figure 7: Die grafiek van $tan\,(2\theta)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = tan\,(\theta)$ (stippellyn). Die asimtote word aangetoon deur die strepies lyn.

2.3.1 Funksies van die vorm $y = tan\,(k\theta)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = tan 0,5\theta$

2. $b(\theta) = tan1\theta$
3. $c(\theta) = tan1,5\theta$
4. $d(\theta) = tan2\theta$
5. $e(\theta) = tan2,5\theta$

Gebruik jou resultate om die effek van k af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van k, weereens, die periode of frekwensie van die grafiek affekteer. Soos k vermeerder, word die grafiek meer kompak en soos k verminder, word die grafiek meer versprei. The periode van die tan grafiek word gegee deur $\frac{180^\circ}{k}$.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 3.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 8**	

Table 3: Tabel wat die algemene vorm en posisie van die grafieke van funksie in die vorm $y = tan(k\theta)$ opsom.

2.3.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f(\theta) = tan(k\theta)$ is die definisie versameling van een tak $\{\theta : \theta \in \left(-\frac{90^\circ}{k}, \frac{90^\circ}{k}\right)\}$, omdat die funksie ongedefinieerd is vir $\theta = -\frac{90^\circ}{k}$ en $\theta = \frac{90^\circ}{k}$.

Die waarde versameling van $f(\theta) = tan(k\theta)$ is $\{f(\theta) : f(\theta) \in (-\infty, \infty)\}$.

2.3.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = tan(k\theta)$, word die metode om die afsnitte met die x en y asse te bereken gegee.

Daar is baie x-afsnitte; elkeen is halfpad tussen die asimtote.

Die y-afsnit word as volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= tan(k\theta) \\ y_{\text{afsnit}} &= tan(0) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

2.3.4 Asimtote

Die grafiek van $tank\theta$ het asimtote omdat soos $k\theta 90^\circ$ benader, benader $tan(\mathrm{k}\theta)$ oneindig. Met ander woorde, daar is geen gedefinieerde waarde van die funksie by die asimtoot waardes nie.

2.4 Funksies van die vorm $y = sin\,(\theta + p)$

In die vergelyking, $y = sin\,(\theta + p)$ is p 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van die funksies in hierdie vorm word aangetoon in Figure 10 met die funksie $f\,(\theta) = sin\,(\theta + 30°)$.

Image not finished

Figure 10: Grafiek van $f\,(\theta) = sin\,(\theta + 30°)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = sin\,(\theta)$ (stippellyn).

2.4.1 Funksies van die vorm $y = sin\,(\theta + p)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = sin\,(\theta - 90°)$
2. $b\,(\theta) = sin\,(\theta - 60°)$
3. $c\,(\theta) = sin\theta$
4. $d\,(\theta) = sin\,(\theta + 90°)$
5. $e\,(\theta) = sin\,(\theta + 180°)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van p die posisie van die grafiek op die y-as affekteer (die y-afsnit) en die posisie van die grafiek op die x-as (die *faseverskuiwing*). Die p waarde skuif die grafiek horisontaal. Indien p positief is, skuif die grafiek links en indien p negatief is, skuif die grafiek regs.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 4.

$p > 0$	$p < 0$
Image not finished **Figure 11**	

Table 4: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funkies in die vorm $y = sin\,(\theta + p)$ opsom. Die kurwe $y = sin\,(\theta)$ is geplot met 'n stippellyn.

2.4.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\,(\theta) = sin\,(\theta + p)$ is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waardes van $\theta \in \mathbb{R}$ is waarvoor $f\,(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = sin\,(\theta + p)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in [-1, 1]\}$.

2.4.3 Afsnitte

Vir funksie van die vorm $y = sin\,(\theta + p)$, word die metode om die afsnitte met die y as te bereken gegee.

Die y-afsnit word bereken as volg: stel $\theta = 0°$

$$\begin{aligned} y &= sin\,(\theta + p) \\ y_{\text{afsnit}} &= sin\,(0 + p) \\ &= sin\,(p) \end{aligned} \tag{4}$$

2.5 Funksies van die vorm $y = cos\,(\theta + p)$

In die vergelyking $y = cos\,(\theta + p)$, is p 'n konstante en het verskillende effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van die grafiek van hierdie soort funksies word gegee in Figure 13 for the function $f\,(\theta) = cos\,(\theta + 30°)$.

Image not finished

Figure 13: Grafiek van $f\,(\theta) = cos\,(\theta + 30°)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = cos\,(\theta)$ (stippellyn).

2.5.1 Funksies van die vorm $y = cos\,(\theta + p)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = cos\,(\theta - 90°)$
2. $b\,(\theta) = cos\,(\theta - 60°)$
3. $c\,(\theta) = cos\theta$
4. $d\,(\theta) = cos\,(\theta + 90°)$
5. $e\,(\theta) = cos\,(\theta + 180°)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy sal vind dat die waarde van p affekteer die y-afsnit en die fase skuif van die grafiek. Soos in die geval van die sinus grafiek, positiewe waardes van p skuif die cosinus grafiek links, terwyl negatiewe p waardes skuif die grafiek regs.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 5.

$p > 0$	$p < 0$
Image not finished **Figure 14**	

Table 5: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = cos\,(\theta + p)$ opsom. Die kurwe $y = cos\theta$ is geplot met die 'n stippellyn.

2.5.2 Definisie versameling en Waarde versameling

Vir $f\,(\theta) = cos\,(\theta + p)$ is die definisie versameling $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, omdat daar geen waarde is van $\theta \in \mathbb{R}$ waarvoor $f\,(\theta)$ ongedefinieerd is nie.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = cos\,(\theta + p)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in [-1, 1]\}$.

2.5.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = cos\,(\theta + p)$, word die metode om die afsnit met die y as te kry gegee.

Die y-afsnite word bereken as volg: stel $\theta = 0°$

$$\begin{aligned} y &= cos\,(\theta + p) \\ y_{\text{afsnit}} &= cos\,(0 + p) \\ &= cos\,(p) \end{aligned} \tag{5}$$

2.6 Funksies van die vorm $y = tan\,(\theta + p)$

In die vergelyking $y = tan\,(\theta + p)$, is p 'n konstante en het verskeie effekte op die grafiek van die funksie. Die algemene vorm van grafieke van funksies in die vorm word gegee in Figure 16 for the function $f\,(\theta) = tan\,(\theta + 30°)$.

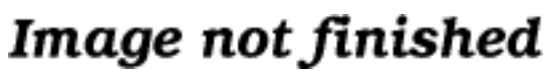

Figure 16: Die grafiek van $tan\,(\theta + 30°)$ (vastelyn) en die grafiek van $g\,(\theta) = tan\,(\theta)$ (stippellyn).

2.6.1 Funksies van die vorm $y = tan\,(\theta + p)$

Op dieselfde assestelsel, plot die volgende grafieke:

1. $a\,(\theta) = tan\,(\theta - 90°)$
2. $b\,(\theta) = tan\,(\theta - 60°)$
3. $c\,(\theta) = tan\theta$
4. $d\,(\theta) = tan\,(\theta + 60°)$
5. $e\,(\theta) = tan\,(\theta + 180°)$

Gebruik jou resultate om die effek van p af te lei.

Jy behoort te vind dat die waarde van p affekteer weereens die y-afsnit en die fase skuif van die grafiek. Daar is 'n horisontale skuif na links indien p positief is en na regs indien p negatief is.

Die verskillende eienskappe word opgesom in Table 6.

$k > 0$	$k < 0$
Image not finished **Figure 17**	

Table 6: Tabel wat die algemene vorm en posisie van grafieke van funksies in die vorm $y = tan\,(\theta + p)$ opsom. Die kurwe $y = tan\,(\theta)$ word geplot met 'n stippellyn.

2.6.2 Definisie versameling en Waade versameling

Vir $f\,(\theta) = tan\,(\theta + p)$ is die definisie versameling van een tak $\{\theta : \theta \in (-90^\circ - p, 90^\circ - p\}$, omdat die funksie ongedefinieerd is vir $\theta = -90^\circ - p$ en $\theta = 90^\circ - p$.

Die waarde versameling van $f\,(\theta) = tan\,(\theta + p)$ is $\{f\,(\theta) : f\,(\theta) \in (-\infty, \infty)\}$.

2.6.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm $y = tan\,(\theta + p)$ word die metode om die afsnitte met die y as te bereken gegee.

Die y-afsnit word as volg bereken: stel $\theta = 0^\circ$

$$\begin{aligned} y &= tan\,(\theta + p) \\ y_{\text{afsnit}} &= tan\,(p) \end{aligned} \tag{6}$$

2.6.4 Asimtote

Die grafiek van $tan\,(\theta + p)$ het asimtote, omdat soos $\theta + p90^\circ$ benader, benader $tan\,(\theta + p)$ oneindig. Daar is dus geen gedefinieerde waarde vir die funksie by die asimtoot waardes nie.

2.6.4.1 Funksies van verskillende vorms

Gebruik jou kennis van die effekte van p en k teken 'n rowwe skets van die volgende funksies, sonder om 'n tabel van waardes te gebruik.

1. $y = sin3x$
2. $y = -cos2x$
3. $y = tan\frac{1}{2}x$
4. $y = sin\,(x - 45^\circ)$
5. $y = cos\,(x + 45^\circ)$
6. $y = tan\,(x - 45^\circ)$
7. $y = 2sin2x$
8. $y = sin\,(x + 30^\circ) + 1$