

# HIPERBOLIESE FUNKSIES EN GRAFIEKE\*

Free High School Science Texts Project

Based on *Hyperbolic Functions and Graphs*<sup>†</sup> by

Rory Adams

Free High School Science Texts Project

Heather Williams

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the  
Creative Commons Attribution License <sup>‡</sup>

## 1 Inleiding

In graag 10 het jy verskillende grafieke se vorms bestudeer. In hierdie hoofstuk sal jy leer van grafieke van funksies.

## 2 Funksies in die Vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

Hierdie vorm van die hiperboliese funksie is effens meer kompleks as die vorms wat in graad 10 teëgekom is.

## ***Image not finished***

**Figure 1:** Algemene vorm en posisie van die grafiek van 'n funksie in die vorm  $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ . Die asymptote word aangedui as stippellyne.

### 2.1 Ondersoek: Funksies van die Vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

- Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

a.  $a(x) = \frac{-2}{x+1} + 1$   
 b.  $b(x) = \frac{-1}{x+1} + 1$

\*Version 1.1: Jul 30, 2011 8:44 am -0500

<sup>†</sup><http://cnx.org/content/m30845/1.3/>

<sup>‡</sup><http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>

- c.  $c(x) = \frac{0}{x+1} + 1$   
d.  $d(x) = \frac{1}{x+1} + 1$   
e.  $e(x) = \frac{2}{x+1} + 1$

Gebruik die resultate om die effek af te lei van Use your results to deduce the effect of  $a$ .

2. Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke:

- a.  $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$   
b.  $g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$   
c.  $h(x) = \frac{1}{x+0} + 1$   
d.  $j(x) = \frac{1}{x+1} + 1$   
e.  $k(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

Gebruik jou resultate om die effekte af te lei van  $p$ .

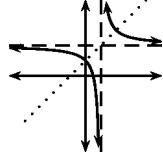
3. Deur die algemene metode van die bogenoemde aktiwiteite, kies jou eie waardes van  $a$  en  $p$  om 5 verskillende grafieke te teken van  $y = \frac{a}{x+p} + q$  om die effekte van  $q$  af te lei.

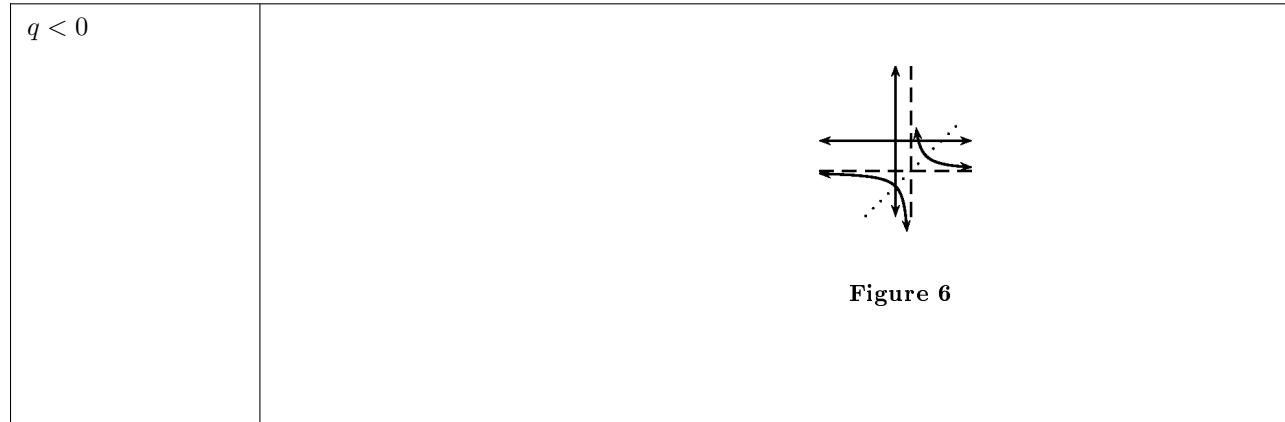
Jy behoort te gevind het dat die teken van  $a$  beïnvloed of die grafiek in die eerste en derde of in die tweede en vierde kwadrant van die Cartesiese vlak is.

Jy sou ook gevind het dat die waarde vand  $p$  beïnvloed of die  $x$ -afsnit negatief ( $p > 0$ ) of positief( $p < 0$ ) is.

Jy behoort ook te gevind het dat die waarde van  $q$  beïnvloed of die grafiek bo diex-as ( $q > 0$ ) of onder die  $x$ -as ( $q < 0$ ) lê.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 1. Die asse van simmetrië vir elke grafiek word vertoon as 'n stippellyn.

	$p < 0$
	$a > 0$
$q > 0$	
<b>Figure 2</b>	
<i>continued on next page</i>	

**Figure 6**

**Table 1:** Tabel wat die algemene vorms en posisies opsom van funksies in die vorm  $y = \frac{a}{x+p} + q$ . Die assen van simmetrie word vertoon as stippellyne.

## 2.2 Gebied en Terrein

Vir  $y = \frac{a}{x+p} + q$ , is die funksie ongedefinieerd vir  $x = -p$ . Die gebied is daarom  $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -p\}$ . Ons sien dat  $y = \frac{a}{x+p} + q$  kan herskryf word as:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{a}{x+p} + q \\
 y - q &= \frac{a}{x+p} \\
 \text{As } x \neq -p \text{ dan is: } (y - q)(x + p) &= a \\
 x + p &= \frac{a}{y - q}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dit wys dat die funksie ongedefinieerd is by  $y = q$ . Die terrein van  $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$  is daarom  $\{f(x) : f(x) \in R, f(x) \neq q\}$ .

Byvoorbeeld, die gebied van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$  is  $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$  want  $g(x)$  is ongedefinieerd by  $x = -1$ .

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\
 (y - 2) &= \frac{2}{x+1} \\
 (y - 2)(x + 1) &= 2 \\
 (x + 1) &= \frac{2}{y - 2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ons kan sien dat  $g(x)$  is ongedefinieerd by  $y = 2$ . Daarom is die gebied  $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$ .

### 2.2.1 Gebied en Terrein

1. Bepaal die terrein van  $y = \frac{1}{x} + 1$ .
2. Gegewe:  $f(x) = \frac{8}{x-8} + 4$ . Write down the domain of  $f$ .
3. Bepaal die gebied van  $y = -\frac{8}{x+1} + 3$

### 2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm,  $y = \frac{a}{x+p} + q$ , word die afsnitte met die  $x$  en  $y$  asse bereken deur  $x = 0$  te stel vir die  $y$ -afsnit en deur  $y = 0$  te stel vir die  $x$ -afsnit.

The  $y$ -intercept is calculated as follows:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+p} + q \\ y_{int} &= \frac{a}{0+p} + q \\ &= \frac{a}{p} + q \end{aligned} \tag{3}$$

Byvoorbeeld, die  $y$ -afsnit van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$  word verkry deur  $x = 0$  te stel, wat lewer:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ y_{int} &= \frac{2}{0+1} + 2 \\ &= \frac{2}{1} + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned} \tag{4}$$

Die  $x$ -afsnitte word bereken deur  $y = 0$  te stel as volg:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+p} + q \\ 0 &= \\ &= \\ \frac{a}{x_{int}+p} + q &= \\ \frac{a}{x_{int}+p} &= \\ &= \\ -q &= \\ a &= \\ -q(x_{int} + p) &= \\ x_{int} + p &= \\ &= \\ \frac{a}{-q} &= \\ x_{int} &= \\ &= \\ \frac{a}{-q} - p &= \end{aligned} \tag{5}$$

Byvoorbeeld, die  $x$ -afsnit van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$  word gegee deur  $x = 0$  te stel om die volgende te kry:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\
 0 &= \frac{2}{x_{int}+1} + 2 \\
 -2 &= \frac{2}{x_{int}+1} \\
 -2(x_{int}+1) &= 2 \\
 x_{int}+1 &= \frac{2}{-2} \\
 x_{int} &= -1 - 1 \\
 x_{int} &= -2
 \end{aligned} \tag{6}$$

### 2.3.1 Afsnitte

1. Gegewe:  $h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ . Bepaal die koördinate van die afsnitte van  $h$  met die  $x$ - en  $y$ -asse.
2. Bepaal die  $x$ -afsnit van die grafiek van  $y = \frac{5}{x} + 2$ . Hoekom is daar geen  $y$ -afsnit vir hierdie funksie nie?

### 2.4 Asimptote

Daar is twee asimptote vir funksies van die vorm  $y = \frac{a}{x+p} + q$ . Hulle word bepaal deur die gebied en terrein te ondersoek.

Ons het gesien dat die funksie ongedefinieerd was by  $x = -p$  en vir  $y = q$ . Daarom is die asimptote  $x = -p$  en  $y = q$ .

Byvoorbeeld, die gebied van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$  is  $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$  because  $g(x)$  is ongedefinieerd by  $x = -1$ . Ons sien ook dat  $g(x)$  is ongedefinieerd by  $y = 2$ . Daarom is die terrein  $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$ .

Hieruit kan ons aflei dat die asimptote lê by  $x = -1$  en  $y = 2$ .

#### 2.4.1 Asimptote

1. Gegewe:  $h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ . Bepaal die vergelykings van die asimptote van  $h$ .
2. Skryf die vergelyking neer van die vertikale asimptoot van die funksie  $y = \frac{1}{x-1}$ .

### 2.5 Teken Grafieke van die Vorm $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Ten einde grafieke te teken van funksies van die vorm,  $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ , moet ons vier eienskappebepaal met berekening:

1. gebied en terrein
2. asimptote
3.  $y$ -afsnit
4.  $x$ -afsnit

Byvoorbeeld, teken die grafiek van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ . Dui die afsnitte en asimptote aan.

Ons het bepaal dat die gebied is  $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$  en die terrein is  $\{g(x) : g(x) \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)\}$ . Daarom is die asimptote by  $x = -1$  en  $y = 2$ .

Die  $y$ -intercept is  $y_{int} = 4$  en die  $x$ -afsnit is  $x_{int} = -2$ .

---

## ***Image not finished***

**Figure 10:** Grafiek van  $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ .

---

### 2.5.1 Grafieke

1. Teken die grafiek van  $y = \frac{1}{x} + 2$ . Dui die horisontale asymptoot aan.
2. Gegewe:  $h(x) = \frac{1}{x+4} - 2$ . Teken die grafiek van  $h$  en dui duidelik die asymptote en ALLE afsnitte met die asse.
3. Teken die grafiek van  $y = \frac{1}{x}$  en  $y = -\frac{8}{x+1} + 3$  op die selfdeassestelsel.
4. Teken die grafiek van  $y = \frac{5}{x-2,5} + 2$ . Verduidelik jou metode.
5. Teken die grafiek van die funksie gedefinieer deur  $y = \frac{8}{x-8} + 4$ . Dui die asymptote en die afsnitte met die asse aan.

## 3 Einde van die Hoofstuk Oefeninge

1. Teken die grafeik van die hiperbool gedefinieer deur  $y = \frac{2}{x}$  vir  $-4 \leq x \leq 4$ . Veronderstel die hiperbool word geskuif met 3 eenhede na regs en 1 eenheid af. Wat is die nuwe vergelyking nou?
2. Gebaseer op die grafiek van  $y = \frac{1}{x}$ , bepaal die vergelyking van grafiek met asymptote  $y = 2$  en  $x = 1$  wat deur die punt  $(2; 3)$  gaan.