Eksponensiële funksies en grafieke - Graad 11[*]

Free High School Science Texts Project

Based on *Exponential Functions and Graphs - Grade 11*[†] by

Rory Adams

Free High School Science Texts Project

Heather Williams

1 Inleiding

In Graad 10 het jy grafieke van baie verskillende vorms bestudeer . In hierdie hoofstuk sal jy 'n bietjie meer leer oor die grafieke van eksponensiële funksies.

2 Funksies van die Vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ for $b > 0$

Hierdie vorm van die eksponensiële funksie is 'n bietjie meer kompleks dan die vorm wat in Graad 10 bestudeer was.

Figure 1: Algemene vorm en posisie van die grafiek van 'n funksie van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$.

2.1 Ondersoek : Funksies van die Vorm $y = ab^{(x+p)} + q$

1. Op dieselfde assestelsel met $-5 \leq x \leq 3$ en $-35 \leq y \leq 35$ steek die volgende grafieke af:

[*] Version 1.1: Aug 1, 2011 1:57 am -0500
[†] http://cnx.org/content/m30856/1.3/
[‡] http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

a. $f(x) = -2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
b. $g(x) = -1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
c. $h(x) = 0 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
e. $k(x) = 2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$

Gebruik jou resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van a. Jy sal vind dat die waarde van a beïnvloed of die grafiek opwaarts buig ($a > 0$) of afwaarts buig ($a < 0$). Jy sal ook vind dat 'n groter waarde van$a$ (wanneer a positief is) sal die grafiek opwaarts uitrek. Maar wanneer a negatief is, sal 'n laer waarde van a (soos -2 in plaas van -1) die grafiek afwaarts uitrek. Ten slotte, let daarop dat wanneer $a = 0$ is die grafiek 'n eenvoudige horisontale lyn. Dit is waarom ons $a \neq 0$ stel in die oorspronklike definisies van hierdie funksies.

2. Op dieselfde assestelsel met $-3 \leq x \leq 3$ en $-5 \leq y \leq 20$, steek die volgende grafieke af:

a. $f(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} - 2$
b. $g(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} - 1$
c. $h(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 0$
d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
e. $k(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 2$

Gebruik jou resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van q. Jy sal vind dat wanneer q toeneem, word die hele grafiek opwaarts verskuif. Wanneer q afneem (moontlik ook negatief word), sal die grafiek afwaarts verskuif.

3. Op dieselfde assestelsel met $-5 \leq x \leq 3$ en $-35 \leq y \leq 35$, steek die volgende grafieke af:

a. $f(x) = -2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
b. $g(x) = -1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
c. $h(x) = 0 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
d. $j(x) = 1 \cdot 2^{(x+1)} + 1$
e. $k(x) = 2 \cdot 2^{(x+1)} + 1$

Gebruik u resultate om te verstaan wat gebeur wanneer jy die waarde verander van a. Jy sal vind dat die waarde van a beïnvloed of die grafiek opwaarts buig($a > 0$)of afwaarts buig ($a < 0$). Jy sal ook vind dat 'n groter waarde van a (wanneer a positief is) sal die grafiek opwaarts uitrek.Maar wanneer a negatief is, sal 'n laer waarde van a (soos -2 in plaas van -1)die grafiek afwaarts uitrek. Ten slotte let ons op dat wanneer $a = 0$ is die grafiek eenvoudige 'n horisontale lyn. Dit is waarom ons $a \neq 0$ stel in die oorspronklike definisies van hierdie funksies.

4. Na aanleiding van die algemene metode van die bogenoemde aktiwiteite, kies jou eie waardes vir a en q om 5 grafieke af te steek van $y = ab^{(x+p)} + q$ op dieselfde assestelsel (kies jou eie perke vir x en y sorgvuldig). Maak seker dat jy dieselfde waardes gebruik vir a, b en q vir elke grafiek, en verskillende waardes vir p. Gebruik jou resultate om te verstaan wat die uitwerking is van 'n veranderende waarde van p.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 1.

	$p < 0$		$p > 0$	
	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
			continued on next page	

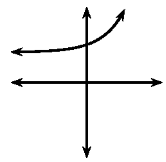
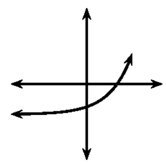
$q>0$	 Figure 2
$q<0$	 Figure 6

Table 1: Tabel opsomming van algemene vorms en posisies van die funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$.

2.2 Gebied en Terrein

Vir $y = ab^{(x+p)} + q$,word die funksie gedefinieer vir alle reële waardes van x. Daarvoor is die gebied $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Die terrein van $y = ab^{(x+p)} + q$ is afhanklik van die teken van a.

As $a > 0$ dan is:

$$\begin{aligned} b^{(x+p)} &> 0 \\ a \cdot b^{(x+p)} &> 0 \\ a \cdot b^{(x+p)} + q &> q \\ f(x) &> q \end{aligned} \quad (1)$$

Daarom as $a > 0$, dan is die terrein $\{f(x) : f(x) \in [q, \infty)\}$. Met ander woorde $f(x)$ ken enige reële getal groter as q wees.

As $a < 0$ dan is:

$$\begin{aligned} b^{(x+p)} &> 0 \\ a \cdot b^{(x+p)} &< 0 \\ a \cdot b^{(x+p)} + q &< q \\ f(x) &< q \end{aligned} \quad (2)$$

Daarvoor as $a < 0$, dan is die terrein $(-\infty, q)$, betekende dat $f(x)$ kan enige reële getal wees kleiner as q. Gelykerwys, kan 'n mens skryf dat die terrein is $\{y \in \mathbb{R} : y < q\}$.

Byvoorbeeld die gebied van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$. Vir die terrein,

$$\begin{array}{rcl} 2^{x+1} & > & 0 \\ 3 \cdot 2^{x+1} & > & 0 \\ 3 \cdot 2^{x+1} + 2 & > & 2 \end{array} \quad (3)$$

Daarom is die terrein $\{g(x) : g(x) \in [2, \infty)\}$.

2.2.1 Gebied en Terrein

1. Gee die gebied van $y = 3^x$.
2. Wat is die gebied en terrein van$f(x) = 2^x$?
3. Bepaal die gebied en terrein van $y = (1,5)^{x+3}$.

2.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm, $y = ab^{(x+p)} + q$, word die afsnitte met die x- en y-as bereken deur $x = 0$ te stel vir die y-afsnit en deur $y = 0$ te stel vir die x-afsnit.

Die y-afsnit word soos volg bereken:

$$\begin{array}{rcl} y & = & ab^{(x+p)} + q \\ y_{int} & = & ab^{(0+p)} + q \\ & = & ab^p + q \end{array} \quad (4)$$

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ word verkry deur $x = 0$ te stel om te gee:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 3 \cdot 2^{x+1} + 2 \\ y_{int} & = & 3 \cdot 2^{0+1} + 2 \\ & = & 3 \cdot 2^1 + 2 \\ & = & 3 \cdot 2 + 2 \\ & = & 8 \end{array} \quad (5)$$

Die x-afsnitte word bereken deur $y = 0$ te stel soos volg:

$$\begin{array}{rcl} y & = & ab^{(x+p)} + q \\ 0 & = & ab^{(x_{int}+p)} + q \\ ab^{(x_{int}+p)} & = & -q \\ b^{(x_{int}+p)} & = & -\frac{q}{a} \end{array} \quad (6)$$

Omdat $b > 0$ (dit is 'n vereiste in die oorspronklike definisie) en 'n positiewe getal verhef tot enige mag is altyd positief, sal die laaste vergelyking hierbo alleenlik 'n reële oplossing hê as of $a < 0$ of $q < 0$ (maar nie beide nie). Bykomend moet a nie gelyk wees aan nul nie vir deling om geldig te wees. Indien hierdie voorwaardes nie bevredig word nie, sal die grafiek van die funksie van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ geen x-afsnitte hê nie.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ word gegee deur $y = 0$ te stel om te gee:

$$\begin{array}{rcl} y & = & 3 \cdot 2^{x+1} + 2 \\ 0 & = & 3 \cdot 2^{x_{int}+1} + 2 \\ -2 & = & 3 \cdot 2^{x_{int}+1} \\ 2^{x_{int}+1} & = & \frac{-2}{2} \end{array} \quad (7)$$

wat geen reële oplossing lewer nie. Daarom het die grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ geen x-afsnit nie. Jy sal opmerk dat om$g(x)$ te bereken vir enige waarde van x ,lewer altyd 'n positiewe getal, en dit beteken dat $y$nooit nul sal wees nie en dus sal die grafiek nooit die x-as sny nie.

2.3.1 Intercepts

1. Gee die y-afsnit van die grafiek van $y = b^x + 2$.
2. Gee die x- en y-afsnitte van die grafiek van$y = \frac{1}{2}(1,5)^{x+3} - 0,75$.

2.4 Asimptote

Funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$het altyd presies een horisontale asimptoot.

Wanneer ons die terrein van hierdie funksies ondersoek, sien ons dat ons altyd of $y < q$ of $y > q$ verkry vir alle inset waardes van x. Daarom is die lyn $y = q$ 'n asimptoot.

Byvoorbeeld , ons het vroeër opgelet dat die terrein van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$ is $(2, \infty)$ omdat $g(x)$ altyd groter as 2 is.Maar die waarde van $g(x)$ kan baie naby 2 wees alhoewel dit nooit daaraan gelyk word nie. Byvoorbeeld, as jy $g(-20)$, bereken, is die waarde 2,000006 benaderd.Deur gebruik te maak van groter negatiewe waardes van$x$ sal dit$g(x)$ nog nader aan 2 bring: die waarde van$g(-100)$ is so na aan 2 dat die sakrekenaar nie presies genoeg die verskil kan aandui nie, en sal (foutiewelik) aan dui dat dit gelyk is aan 2 .

Hiervan lei ons af dat $y = 2$ 'n asimptoot is.

2.4.1 Asimptote

1. Gee die vergelyking van die asimptote van die grafiek van $y = 3^x - 2$.
2. Wat is die vergelyking van die horisontale asimptoot van die grafiek van $y = 3(0,8)^{x-1} - 3$?

2.5 Die skets van Grafieke van die Vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$

Om grafieke te skets van die funksies van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$, moet ons vier karaktereienskappe vasstel:

1. Gebied en terrein
2. y-afsnit
3. x-afsnit

Byvoorbeeld, skets die grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$. Steek die afsnitte af.

Ons stel die gebied vas as $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en die terrein as $\{g(x) : g(x) \in (2, \infty)\}$.

Die y-afsnit is $y_{int} = 8$ en daar is geen$x$-afsnit nie.

Figure 10: Grafiek van $g(x) = 3 \cdot 2^{x+1} + 2$.

2.5.1 Skets van Grafieke

1. Teken die grafieke van die volgende op dieselfde assestel. Benoem die horisontale asimptote en y-afsnitte duidelik.
   a. $y = b^x + 2$
   b. $y = b^{x+2}$
   c. $y = 2b^x$
   d. $y = 2b^{x+2} + 2$

   a. Draw the graph of $f(x) = 3^x$.
   b. Verduidelik waar 'n oplossing vir $3^x = 5$ van die grafiek afgelees kan word.

3 Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Die volgende tabel van waardes het kolomme waarin die y-waardes vir die grafiek $y = a^x$, $y = a^{x+1}$ en $y = a^x + 1$gegee word. Paar 'n grafiek met 'n kolom.

x	A	B	C
-2	7,25	6,25	2,5
-1	3,5	2,5	1
0	2	1	0,4
1	1,4	0,4	0,16
2	1,16	0,16	0,064

Table 2

2. Die grafiek van $f(x) = 1 + a.2^x$ (a is 'n konstante) gaan deur die oorsprong.
   a. Bepaal die waarde van a.
   b. Bepaal die waarde van$f(-15)$jkorrek tot VYF desimale plekke.
   c. Bepaal die waarde van$x$, as $P(x; 0,5)$ op die grafiek van $f$lê.
   d. As die grafiek van f 2 eenhede na regs verskuif word om die funksie h,te gee ,skryf neer die vergelyking van h.
3. Die grafiek van $f(x) = a.b^x \quad (a \neq 0)$het die punt P(2;144) op f.
   a. As $b = 0,75$, bereken die waarde van a.
   b. Skryf nou neer die vergelyking van f.
   c. Bepaal, korrek tot 2 desimale plekke, die waarde van $f(13)$.
   d. Beskryf die transformasie van die kurwe van f na h as $h(x) = f(-x)$.