Funksies en Grafieke: Eksponensiële funksies*

Free High School Science Texts Project

This work is produced by The Connexions Project and licensed under the
Creative Commons Attribution License †

1 Funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$

Funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$ is bekend as *eksponensiële* funksies. Die algemene vorm van 'n funksie van hierdie tipe word gewys in Figure 1.

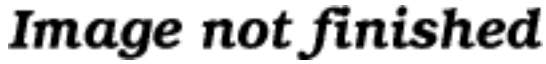

Figure 1: Algemene vorm en posisie van die grafiek van 'n funksie met die vorm $f(x) = ab^{(x)} + q$.

1.1 Ondersoek: Funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$

1. Op dieselfde assestelsel, skets die volgende grafieke:
   a. $a(x) = -2.b^{(x)} + 1$
   b. $b(x) = -1.b^{(x)} + 1$
   c. $c(x) = -0.b^{(x)} + 1$
   d. $d(x) = -1.b^{(x)} + 1$
   e. $e(x) = -2.b^{(x)} + 1$

   Gebruik jou antwoorde om 'n gevolgtrekking ten opsigte van die invloed van a te maak.
2. Op dieselfde assestelsel, skets die volgende grafieke:
   a. $f(x) = 1.b^{(x)} - 2$
   b. $g(x) = 1.b^{(x)} - 1$
   c. $h(x) = 1.b^{(x)} + 0$
   d. $j(x) = 1.b^{(x)} + 1$
   e. $k(x) = 1.b^{(x)} + 2$

   Gebruik jou antwoorde om 'n gevolgtrekking ten opsigte van die invloed van q te maak.

*Version 1.1: Aug 4, 2011 6:18 am -0500
†http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Jy sou gevind het dat die waarde van a bepaal die vorm van die grafiek, dit wil sê: "Curves Upwards" – "CU" ($a > 0$) of "Curves Downwards" – "CD" ($a < 0$).

Jy sou ook gevind het die waarde van q bepaal die posisie van die y-afsnit.

Hierdie verskillende eienskappe word opgesom in Table 1.

	$a > 0$
$q > 0$	Image not finished **Figure 2**
$q < 0$	Image not finished **Figure 4**

Table 1: Getabelleerde opsomming van algemene vorms en posisies van funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$

1.2 Definisieversameling en Waardeversameling

Vir $y = ab^{(x)} + q$, is die funksie gedefinieer vir alle reële waardes van x. Dus, die definisieversameling is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$.

Die waardeversameling van $y = ab^{(x)} + q$ word bepaal deur die teken van a.

As $a > 0$ dan:

$$\begin{aligned} b^{(x)} &\geq 0 \\ a \cdot b^{(x)} &\geq 0 \\ a \cdot b^{(x)} + q &\geq q \\ f(x) &\geq q \end{aligned} \tag{1}$$

Dus, as $a > 0$, dan is die waardeversameling $\{f(x) : f(x) \in [q; \infty)\}$.

As $a < 0$ dan:

$$\begin{aligned} b^{(x)} &\leq 0 \\ a \cdot b^{(x)} &\leq 0 \\ a \cdot b^{(x)} + q &\leq q \\ f(x) &\leq q \end{aligned} \tag{2}$$

Dus, as $a < 0$, dan is die waardeversameling $\{f(x) : f(x) \in (-\infty; q]\}$.

Byvoorbeeld, die definisieversameling van $g(x) = 3.2^x + 2$ is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$. Vir die waardeversameling,

$$\begin{aligned} 2^x &\geq 0 \\ 3 \cdot 2^x &\geq 0 \\ 3 \cdot 2^x + 2 &\geq 2 \end{aligned} \tag{3}$$

Dus is die waardeversameling $\{g(x) : g(x) \in [2; \infty)\}$.

1.3 Afsnitte

Vir funksies van die vorm, $y = ab^{(x)} + q$, word die afsnitte met die x en y-as bereken deur $x = 0$ te stel vir die y-afsnit en deur $y = 0$ te stel vir die x-afsnit.

Die y-afsnit word as volg bereken:

$$\begin{aligned} y &= ab^{(x)} + q \\ y_{int} &= ab^{(0)} + q \\ &= a(1) + q \\ &= a + q \end{aligned} \tag{4}$$

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = 3.2^x + 2$ word gegee deur $x = 0$ te stel, om dan te kry:

$$\begin{aligned} y &= 3.2^x + 2 \\ y_{int} &= 3.2^0 + 2 \\ &= 3 + 2 \\ &= 5 \end{aligned} \tag{5}$$

Die x-afsnitte word bereken deur $y = 0$ te stel, soos volg:

$$\begin{aligned} y &= ab^{(x)} + q \\ 0 &= ab^{(x_{int})} + q \\ ab^{(x_{int})} &= -q \\ b^{(x_{int})} &= -\frac{q}{a} \end{aligned} \tag{6}$$

Dit het net ‘n rëele oplossing as een van beide $a < 0$ of $q < 0$. Anders, het die grafiek van die vorm $y = ab^{(x)} + q$ geen x-afsnitte.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = 3.2^x + 2$ word gegee deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2^x + 2 \\ 0 &= 3 \cdot 2^{x_{int}} + 2 \\ -2 &= 3 \cdot 2^{x_{int}} \\ 2^{x_{int}} &= \frac{-2}{3} \end{aligned} \tag{7}$$

en dit het geen rëele oplossing nie. Dus, die grafiek van $g(x) = 3.2^x + 2$ het geen x-afsnitte nie.

1.4 Asimptote

Daar is een asimptoot vir funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$. Die asimptoot kan bepaal word deur die analise van die waardeversameling.

Ons het gesien dat die terrein bepaal word deur die waarde van q. As $a > 0$, dan is die terrein $\{f(x) : f(x) \in [q; \infty)\}$.

Dit wys dat die funksiewaarde neig na die waarde van q as $x \to -\infty$. Dus die horisontale asimptoot lê by $y = q$.

1.5 Sketse van Grafieke van die vorm $f(x) = ab^{(x)} + q$

Om grafieke te skets van funksies van die vorm, $f(x) = ab^{(x)} + q$, moet ons vier eienskappe bereken:

1. Definisieversameling en Waardeversameling
2. y-afsnit
3. x-afsnit

Byvoorbeeld, skets die grafiek van $g(x) = 3.2^x + 2$. Merk die afsnitte.

Ons het die definisieversameling bepaal om $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ te wees en die waardeversameling om $\{g(x) : g(x) \in (2, \infty)\}$ te wees.

Die y-afsnit is $y_{int} = 5$ en daar is geen x-afsnitte.

Image not finished

Figure 6: Grafiek van $g(x) = 3.2^x + 2$

Exercise 1: Trek van 'n Eksponsiële Grafiek *(Solution on p. 7.)*

Trek die grafiek van $y = -2.3^x + 5$.

1.5.1 Eksponensiele Funksies en Grafieke

1. Skets die grafieke van $y = 2^x$ en $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ op dieselfde assestelsel.
   a. Is die x-as die asimptoot en/of simmetrie-as in albei grafieke? Verduidelik jou antwoord.
   b. Watter grafiek word aangedui met die volgende vergelyking $y = 2^{-x}$? Verduidelik jou antwoord.
   c. Los die vergelyking $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ met behulp van 'n skets op en kontroleer jou antwoord deur middel van translasie.
   d. Voorspel hoe die grafiek $y = 2.2^x$ vergelyk met $y = 2^x$en teken vervolgens die grafiek van $y = 2.2^x$ op dieselfde assestelsel.

   Kliek hier vir die antwoord [1]
2. Die kurwe van die eksponensiele funksie f in die meegaande diagram sny die y-as by die punt A(0; 1). Die punt B(2; 4) is op f.

[1] See the file at <http://cnx.org/content/m39665/latest/http://www.fhsst.org/lxk>

Image not finished

Figure 7

a. Bepaal die vergelyking van funksie f.
b. Bepaal die vergelyking van h, die refleksie van die kurwe van f in die x-as.
c. Bepaal die waardeversameling van h.

Kliek hier vir die oplossing [2]

2 Opsomming

- Jy behoort die volgende kenmerke van funksies te ken:
  - Die gegewe of gekose x-waarde is bekend as die onafhanklike veranderlike want die waarde van x kan vrylik gekies word. Die berekende y-waarde staan bekend as die afhanklike veranderlike aangesien die waarde van y afhang van die gekose waarde van x.
  - Die gebied van 'n relasie is die versameling van al die x-waardes waarvoor daar ten minste een y-waarde bestaan volgens die funksievoorskrif. Die terrein is die versameling van al die y-waardes wat verkry kan word deur ten minste een van die x-waardes te gebruik.
  - Die afsnit is die punt waar die grafiek 'n as sny. Die x-afsnit(te) is die punt(e) waar die grafiek die x-as sny en die y-afsnit(te) is die punt(e) waar die grafiek die y-as sny.
  - Slegs vir grafieke van funksies met 'n hoogste mag van groter as 1. Daar is twee tipes draaipunte: 'n minimum draaipunt en 'n maksimum draaipunt. 'n Minimum draaipunt is 'n punt op die grafiek waar die grafiek ophou afneem in waarde en begin toeneem in waarde. 'n Maksimum draaipunt is 'n punt op die grafiek waar die grafiek ophou toeneem in waarde en begin afneem in waarde.
  - 'n Asimptoot is 'n reguitlyn of kurwe wat die grafiek van 'n funksie sal nader, maar nooit raak nie.
  - 'n Lyn ten opsigte waarvan die grafiek simmetries is.
  - Die interval waar die grafiek toeneem of afneem.
  - 'n Grafiek is kontinu as daar geen onderbreking in die grafiek is nie.
- Versamelingnotasie: 'n versameling van sekere x-waardes het die volgende notasie: {x : voorwaardes, meer voorwaardes}
- Interval notasie: hier skryf ons 'n interval in die vorm 'laer hakie, laer getal, kommapunt, hoër getal, hoër hakie'
- Jy moet die volgende funksies en hulle eienskappe ken:
  - Funksies van die vorm $y = ax + q$. Dit is reguitlyne.
  - Funksies van die vorm $y = ax^2 + q$. Dit staan bekend as paraboliese funksies of parabole.
  - Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$. Dit staan bekend as hiperboliese funksies of hiperbole.
  - Funksies van die vorm $y = ab^{(x)} + q$. Hulle staan bekend as eksponensiële funksies.

3 Einde van Hoofstuk Oefeninge

1. Gegee die funksies $f(x) = -2x^2 - 18$ en $g(x) = -2x + 6$
   a. Skets f en g op dieselfde assestelsel.

[2] See the file at <http://cnx.org/content/m39665/latest/http://www.fhsst.org/lx0>

b. Bereken die snypunte van f en g.
c. Gebruik dan jou grafieke en hulle snypunte om vir x op te los wanneer:
   i. $f(x) > 0$
   ii. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$
d. Gee die vergelyking van die refleksie van f in die x-as.

Kliek hier vir die antwoord [3]

2. Nadat 'n bal neergegooi is, is die hoogte wat die bal terugbons elke keer minder. Die vergelyking $y = 5.(0,8)^x$ toon die verwantskap tussen x, die nommer van die bons, en y, die hoogte van die bons vir 'n spesifieke bal. Wat is die benaderde hoogte van die vyfde bons tot die naaste tiende van 'n eenheid ?
   Kliek hier vir die oplossing [4]
3. Mark het 15 muntstukke in R5- en R2-stukke. Hy het 3 meer R2-stukke as R5-stukke. Hy het 'n stelsel van vergelykings opgestel om die situasie te toon, waar x die hoeveelheid R5-stukke voorstel en y die hoeveelheid R2-stukke voorstel. Hy het vervolgens die probleem grafies opgelos.

   a. Skryf die sisteem van vergelykings neer.
   b. Skets die grafieke op dieselfde assestelsel.
   c. Wat is die oplossing?

   Kliek hier vir die oplossing [5]

[3] See the file at <http://cnx.org/content/m39665/latest/http://www.fhsst.org/lx8>
[4] See the file at <http://cnx.org/content/m39665/latest/http://www.fhsst.org/lxX>
[5] See the file at <http://cnx.org/content/m39665/latest/http://www.fhsst.org/lx9>

Solutions to Exercises in this Module

Solution to Exercise (p. 4)

Step 1. Die gebied is: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en die terrein is: $\{f(x) : f(x) \in (-\infty; 5]\}$.

Step 2. Funksies van hierdie vorm het een asimptoot. Dit lê by $y = q$. Dus die asimptoot van die grafiek is by $y = 5$

Step 3. Ons kry die y-afsnit waar $x = 0$.

$$\begin{aligned} y &= -2.3^x + 5 \\ y &= -2.3^0 + 5 \\ y &= -2(1) + 5 \\ y_{\text{int}} &= 7 \end{aligned} \tag{8}$$

Daar is dus een y-afsnit by $(0, 7)$.

Step 4. Die x-afsnit lê by $y = 0$. Berekening van die x-afsnit gee:

$$\begin{aligned} y &= -2.3^x + 5 \\ 0 &= -2.3^x + 5 \\ -5 &= -2.3^x \\ 3^{x_{\text{int}}} &= \tfrac{5}{2} \\ x_{\text{int}} &= 0,83 \end{aligned} \tag{9}$$

Dus daar is een x-afsnit by $(0, 83, 0)$.

Step 5. As ons dit alles bymekaarsit, gee dit die volgende grafiek:

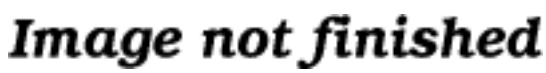

Figure 8