Getalpatrone: Notasie*

Free High School Science Texts Project

1 Notasie

Khan Academy video oor getalpatrone

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/_3BnyEr5fG4&rel=0>

Figure 1

Die n^{de}-term van 'n reeks word geskryf as a_n. So byvoorbeeld, is die eerste term van 'n reeks a_1 en die tiende term van 'n reeks is a_{10}. [U+0149] Reeks hoef nie [U+0149] patroon te volg nie, maar wanneer dit wel 'n patroon het, kan ons dit gewoonlik as [U+0149] formule skryf om die n^{de}-term, a_n, te bereken. In die reeks

$$1; 4; 9; 16; 25; ... \tag{1}$$

waar die reeks bestaan uit die vierkante van heelgetalle, is die formule vir die n^{de}-term:

$$a_n = n^2 \tag{2}$$

Jy kan sien dat dit reg is deur te kyk na:

$$\begin{array}{rcrcr} a_1 & = & 1^2 & = & 1 \\ a_2 & = & 2^2 & = & 4 \\ a_3 & = & 3^2 & = & 9 \\ a_4 & = & 4^2 & = & 16 \\ a_5 & = & 5^2 & = & 25 \\ & ... & & & \end{array} \tag{3}$$

Dus, deur (2) te gebruik, kan ons [U+0149] patroon van die vierkante van heelgetalle vorm.

*Version 1.1: Aug 4, 2011 6:32 am -0500

†http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Ons kan ook 'n konstante verskil tussen die terme bepaal vir sekere patrone.

Definition 1: Konstante verskil
Die konstante verskil is die verskil tussen opeenvolgende terme en word aagedui met die letter d.

Byvoorbeeld, beskou die reeks: $10; 7; 4; 1; ...$. Om die gemeenskaplike verskil te vind, trek ons die betrokke term af van die volgende term.

$$\begin{aligned} 7-10 &= -3 \\ 4-7 &= -3 \\ 1-4 &= -3 \end{aligned} \tag{4}$$

Exercise 1: Studeertafel voortgesit .... ***(Solution on p. 5.)***
Soos voorheen, studeer jy en 3 vriende wiskunde, en julle sit rondom [U+0149] vierkantige tafel. [U+0149] Paar minute later besluit 2 ander vriende om by julle aan te sluit en wil kom sit en julle sit [U+0149] ekstra tafel by sodat al 6 van julle kan sit. Weereens besluit nog 2 van jou vriende om by julle aan te sluit en julle skuif [U+0149] derde tafel sodat daar genoeg plek is vir 8 van julle soos in die prentjie:

Figure 2: Twee ekstra mense kan sit vir elke tafel wat hulle bysit.

Vind [U+0149] wiskundige uitdrukking vir die getal mense wat om n tafels kan sit. Gebruik dan die algemene formule om te bepaal hoeveel mense om 12 tafels kan sit en hoeveel tafels is nodig sodat 20 mense kan sit.

Dit is ook belangrik om te let op die verskil tussen n en a_n: n kan gesien word as 'n plekhouer, terwyl a_n die waarde is by die plek wat "gehou" word deur n. Soos in ons "Studeertafel" voorbeeld, kan 4 mense rondom die eerste tafel (Tabel 1) sit. Dus, by plek $n = 1$, is die waarde van $a_1 = 4$ ensovoorts:

n	1	2	3	4	...
a_n	4	6	8	10	...

Table 1

1.1 Ondersoek : Algemene Formule

1. Vind die algemene formule vir die volgende reekse en vind dan a_{10}, a_{50} en a_{100}:
   a. $2; 5; 8; 11; 14; ...$
   b. $0; 4; 8; 12; 16; ...$
   c. $2; -1; -4; -7; -10; ...$
2. Hieronder is die algemene formules gegee vir 'n paar reekse. Bereken die terme wat weggelaat is.
   a. $0; 3; ...; 15; 24$ $\quad n^2 - 1$
   b. $3; 2; 1; 0; ...; -2$ $\quad -n + 4$
   c. $-11; ...; -7; ...; -3$ $\quad -13 + 2n$

1.2 Patrone en Bewerings

Khan Academy video oor getalpatrone - 2

This media object is a Flash object. Please view or download it at
<http://www.youtube.com/v/zIcxrhyJs6M&rel=0>

Figure 3

In wiskunde is 'n bewering 'n wiskundige stelling wat lyk of dit waar is, maar wat nog nie formeel as waar bewys is nie. 'n Bewering kan gesien word as 'n intelligente raaiskoot of idee wat moontlik 'n patroon kan wees.

Byvoorbeeld: Maak 'n **bewering** oor die getal wat sal volg, gebaseer op die patroon $2; 6; 11; 17 : ...$

Die getalle vermeerder met 4, dan 5, dan 6.

Bewering: Die volgende getal sal vermeerder met 7. So ons verwag dat die volgende getal $17 + 7 = 24$ sal wees.

Exercise 2: Getalpatrone ***(Solution on p. 5.)***

Beskou die volgende patroon:

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 &= 2^2 - 2 \\ 2^2 + 2 &= 3^2 - 3 \\ 3^2 + 3 &= 4^2 - 4 \\ 4^2 + 4 &= 5^2 - 5 \end{aligned} \qquad (5)$$

1. Voeg nog twee rye by aan die die einde van die patroon.
2. Maak 'n bewering oor die patroon en druk die bewering uit in woorde.
3. Veralgemeen die bewering vir die patroon (met ander woorde, beskryf die bewering algebraïes).
4. Bewys dat die bewering waar is.

2 Opsomming

- Daar is 'n hele paar spesiale reekse van getalle:
  - Driehoeksgetalle $1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45; ...$
  - Vierkantsgetalle $1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; ...$
  - Derdemagsgetalle $1; 8; 27; 64; 125; 216; 343; 512; 729; ...$
  - Fibonacci Getalle $0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ...$
- Die algemene formule is $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$ waar d die konstante verskil is tussen die verskillende terme en a_n is die n^{de}-term. Ons kan 'n algemene formule uitwerk vir elke getalpatroon en dit gebruik om te voorspel wat enige getal in die patroon sal wees.

3 Oefeninge

1. Vind die n^{de}-term vir: $3; 7; 11; 15; ...$Kliek hier vir die oplossing[1]

[1] See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lcl>

2. Vind die algemene term vir die volgende reekse:
   a. $-2; 1; 4; 7; ...$
   b. $11; 15; 19; 23; ...$
   c. reeks met $a_3 = 7$ en $a_8 = 15$
   d. reeks met $a_4 = -8$ en $a_{10} = 10$

   Kliek hier vir die oplossing[2]
3. Die sitplekke in 'n gedeelte van 'n sportstadion kan so gerangskik word dat die eerste ry 15 sitplekke het, die tweede ry 19 sitplekke, die derde ry 23 sitplekke, ens. Bereken hoeveel sitpleke is daar in ry 25. Kliek hier vir die oplossing[3]
4. 'n Enkele vierkant kan gemaak word van 4 vuurhoutjies. Om twee vierkante langs mekaar te maak het jy 7 vuurhoutjies nodig, om drie vierkante langs mekaar in 'n ry te maak het jy 10 vuurhoutjies nodig. Bepaal:
   a. die eerste term
   b. die konstante verskil
   c. die algemene formule
   d. hoeveel vuurhoutjies benodig word om 25 vierkante langs mekaar te maak

Figure 4

   Kliek hier vir die oplossing[4]
5. Jy wil begin om geld te spaar, maar omdat jy dit nog nooit gedoen het nie, besluit jy om stadig te begin. Aan die einde van die eerste week sit jy R5 in jou bankrekening, aan die einde van die tweede week R10, en aan die einde van die derde week R15. Na hoeveel weke sit jy R50 in jou bankrekening? Kliek hier vir die oplossing[5]
6. 'n Horisontale lyn kruis 'n tou op vier punte en deel die tou op in 5 dele, soos hieronder gewys word.

Figure 5

   As die tou 19 keer gekruis word deur ewewydige lyne en elke lyn kruis die tou vier keer op verskillende plekke, bereken in hoeveel dele die tou opgedeel word. Kliek hier vir die oplossing[6]

[2]See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lcq>
[3]See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lqi>
[4]See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lc3>
[5]See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lcO>
[6]See the file at <http://cnx.org/content/m39674/latest/http://www.fhsst.org/lcc>

Solutions to Exercises in this Module

Solution to Exercise (p. 2)

Step 1.

Aantal tafels, n	**Aantal mense wat kan sit**	**Formule**
1	$4 = 4$	$= 4 + 2 \cdot (0)$
2	$4 + 2 = 6$	$= 4 + 2 \cdot (1)$
3	$4 + 2 + 2 = 8$	$= 4 + 2 \cdot (2)$
4	$4 + 2 + 2 + 2 = 10$	$= 4 + 2 \cdot (3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$4 + 2 + 2 + 2 + ... + 2$	$= 4 + 2 \cdot (n - 1)$

Table 2

Step 2. Die aantal mense wat rondom n tafels kan sit, is:

$$a_n = 4 + 2 \cdot (n - 1) \tag{6}$$

Step 3. Deur te kyk na die voorbeeld van die vorige gedeelte, bereken hoeveel mense kan rondom 12 tafels sit. Ons soek vir a_{12}, dit is, waar $n = 12$:

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_1 + d \cdot (n - 1) \\ a_{12} & = & 4 + 2 \cdot (12 - 1) \\ & = & 4 + 2\,(11) \\ & = & 4 + 22 \\ & = & 26 \end{array} \tag{7}$$

Step 4.

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & a_1 + d \cdot (n - 1) \\ 20 & = & 4 + 2 \cdot (n - 1) \\ 20 - 4 & = & 2 \cdot (n - 1) \\ 16 \div 2 & = & n - 1 \\ 8 + 1 & = & n \\ n & = & 9 \end{array} \tag{8}$$

Step 5. 26 mense kan rondom 12 tafels sit en 9 tafels is nodig sodat 20 mense kan sit.

Solution to Exercise (p. 3)

Step 1.

$$\begin{array}{c} 5^2 + 5 = 6^2 - 6 \\ 6^2 + 6 = 7^2 - 7 \end{array} \tag{9}$$

Step 2. As 'n getal gekwadreer word en die getal dan weer by sy kwadraat getel word, is die resultaat dieselfde as om die volgende getal te kwadreer en dan die getal af te trek van die kwadraat.

Step 3. Ons het besluit om x hier te gebruik. Jy kan enige letter kies om die patroon te veralgemeen.

$$x^2 + x = (x+1)^2 - (x+1) \tag{10}$$

Step 4.

$$\text{Linkerkant } x^2 + x \tag{11}$$

$$\text{Regterkant}: \ (x+1)^2 - (x+1) \tag{12}$$

$$\begin{array}{rcc} \text{Regterkant} & = & x^2 + 2x + 1 - x - 1 \\ & = & x^2 + x \\ & = & \text{Linkerkant} \end{array} \tag{13}$$

Dus $x^2 + x = (x+1)^2 - (x+1)$